Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · STOCHASTIK

# Zufallsgrößen, Erwartungswert und Hypothesentest

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **19 BE** · zusammen **39 BE**

Name _____ Datum _____

## So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

**Das brauchst du:** Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

**HINWEIS**

**PDF-Seite 1 bis 8:** Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

# Abitur Mathematik: Zufallsgrößen, Erwartungswert und Hypothesentest

6 Aufgaben

## Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Auf einem Vereinsfest wird ein Würfelspiel angeboten. Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Reingewinn eines Spielers in Euro pro Spiel. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der Tabelle unvollständig angegeben.

| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $0{,}3$ | $p$ | $0{,}4$ | $0{,}1$ |

a) Bestimme den Wert von $p$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel kein Geld verliert. (2 BE)

b) Berechne den Erwartungswert von $X$ und beurteile, ob das Spiel für den Verein auf lange Sicht lohnend ist. (2 BE)

**Aufgabe 2**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Eine Münze wird zweimal geworfen. Für jeden Wurf, der „Zahl“ zeigt, erhält man 2 Punkte. Die Zufallsgröße $Y$ gibt die erreichte Punktzahl an.

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y$ in einer Tabelle dar und berechne den Erwartungswert von $Y$. (2 BE)

b) Bei einer anderen Spielvariante wird die Münze nur einmal geworfen; bei „Zahl“ erhält man 3 Punkte, bei „Kopf“ 1 Punkt. Die Zufallsgröße $W$ gibt die erreichte Punktzahl an. Zeige, dass $W$ denselben Erwartungswert wie $Y$, aber eine kleinere Varianz hat. (2 BE)

**Aufgabe 3**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Am Tag der offenen Tür einer Schule zieht man gegen einen Einsatz von 1,50 € eine Karte aus einer Box mit zehn Karten. Eine Karte zeigt einen Stern, drei Karten zeigen ein Herz, die übrigen sechs Karten sind leer. Bei einem Stern werden 6 € ausgezahlt, bei einem Herz 2 €, bei einer leeren Karte nichts.

a) Ermittle den Erwartungswert des Gewinns eines Spielers pro Spiel. (2 BE)

b) Die Auszahlung für ein Herz soll so geändert werden, dass das Spiel fair ist. Bestimme diese Auszahlung. (2 BE)

**Aufgabe 4**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Lea hat einen Kreisel gebaut, der nach dem Drehen entweder auf einer roten oder auf einer blauen Fläche liegen bleibt. Sie vermutet, dass der Kreisel seltener auf „Rot“ als auf „Blau“ fällt. Sie dreht den Kreisel zehnmal und testet die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}5$, wobei $p$ die Wahrscheinlichkeit für „Rot“ ist. Die Zufallsgröße $X$ gibt an, wie oft dabei „Rot“ erzielt wird.

a) Zeige, dass für $p = 0{,}5$ gilt: $P(X \leq 2) = \frac{56}{1024}$. (2 BE)

b) Bestimme die Entscheidungsregel des Tests auf einem Signifikanzniveau von 5 %. (2 BE)

**Aufgabe 5**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Quiz-App gibt es zu jeder Frage vier Antworten, von denen genau eine richtig ist. Um zu prüfen, ob eine Person nur rät, stellt die App ihr vier Fragen. Getestet wird die Nullhypothese „Die Person rät; die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort beträgt bei jeder Frage $\frac{1}{4}$." Sie wird abgelehnt, wenn die Person mindestens drei der vier Fragen richtig beantwortet.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (2 BE)

b) Beschreibe den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechne seine Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Person jede Frage mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ richtig beantwortet. (2 BE)

**Aufgabe 6**

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Ein Betrieb stellt Fahrradschläuche her. Jeder Schlauch wird nach der Herstellung geprüft und in eine von drei Klassen eingeteilt:

| Klasse | Anteil | Gewinn pro Schlauch |
|---|---|---|
| einwandfrei | 85 % | 1,20 € |
| B-Ware (kleiner optischer Mangel, wird günstiger verkauft) | 11 % | 0,30 € |
| Ausschuss (wird entsorgt) | 4 % | Verlust von 0,80 € |

Die Zufallsgröße $G$ beschreibt den Gewinn in Euro für einen zufällig ausgewählten Schlauch.

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $G$ in einer Tabelle dar und berechne den Erwartungswert von $G$. (3 BE)

b) Berechne die Standardabweichung von $G$. An einem Arbeitstag werden 2400 Schläuche hergestellt. Ermittle den zu erwartenden Gewinn für diese Tagesproduktion. (3 BE)

Der Betrieb schafft eine neue Maschine an und möchte sie nur dann dauerhaft einsetzen, wenn sich der Ausschussanteil von 4 % nachweislich verringert hat. Dazu werden 500 auf der neuen Maschine hergestellte Schläuche zufällig ausgewählt und geprüft. Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}04$ auf einem Signifikanzniveau von 5 %, wobei $p$ der Ausschussanteil der neuen Maschine ist. Die Anzahl der Schläuche mit Ausschuss in der Stichprobe soll als binomialverteilt angenommen werden.

c) Begründe die Wahl der Nullhypothese und bestimme die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

d) Beschreibe den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Berechne seine Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass der Ausschussanteil der neuen Maschine tatsächlich 2 % beträgt. (4 BE)

e) Außerdem soll geprüft werden, ob sich der Anteil der B-Ware von 11 % mit der neuen Maschine in die eine oder die andere Richtung verändert hat. Dazu werden 400 Schläuche der neuen Maschine zufällig ausgewählt; die Anzahl der Schläuche mit B-Ware soll als binomialverteilt angenommen werden. Bestimme für den Test der Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}11$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % den Annahmebereich, wobei $p$ hier der Anteil der B-Ware ist. (4 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

# Abitur Mathematik: Zufallsgrößen, Erwartungswert und Hypothesentest

6 Aufgaben

## Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Auf einem Vereinsfest wird ein Würfelspiel angeboten. Die Zufallsgröße $X$ beschreibt den Reingewinn eines Spielers in Euro pro Spiel. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der Tabelle unvollständig angegeben.

| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $0{,}3$ | $p$ | $0{,}4$ | $0{,}1$ |

a) Bestimme den Wert von $p$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel kein Geld verliert. (2 BE)

b) Berechne den Erwartungswert von $X$ und beurteile, ob das Spiel für den Verein auf lange Sicht lohnend ist. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $p = 0{,}2$; $P(X \geq 0) = 0{,}7$. **b)** $E(X) = 0{,}2$**; der Verein verliert auf lange Sicht 0,20 € pro Spiel, das Spiel lohnt sich für ihn nicht.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1: $p = 1 - 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}2$ (1 BE)
2. a) Kein Verlust bedeutet $X \geq 0$: $P(X \geq 0) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}7$ (Probe über das Gegenereignis: $1 - 0{,}3 = 0{,}7$) (1 BE)
3. b) $E(X) = (-2) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = -0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}2$ (1 BE)
4. b) Ein Spieler gewinnt im Mittel 0,20 € pro Spiel, der Verein verliert also auf lange Sicht 0,20 € pro Spiel; das Spiel ist für den Verein nicht lohnend. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei b) wird $E(X) = 0{,}2$ als Gewinn des Vereins gedeutet; $X$ ist aber der Gewinn des Spielers, der Verein macht also im Mittel 0,20 € Verlust pro Spiel. Bei a) wird $X > 0$ statt $X \geq 0$ verwendet und $P(X = 0)$ vergessen, was 0,5 statt 0,7 ergibt.

**Aufgabe 2**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Eine Münze wird zweimal geworfen. Für jeden Wurf, der „Zahl“ zeigt, erhält man 2 Punkte. Die Zufallsgröße $Y$ gibt die erreichte Punktzahl an.

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y$ in einer Tabelle dar und berechne den Erwartungswert von $Y$. (2 BE)

b) Bei einer anderen Spielvariante wird die Münze nur einmal geworfen; bei „Zahl“ erhält man 3 Punkte, bei „Kopf“ 1 Punkt. Die Zufallsgröße $W$ gibt die erreichte Punktzahl an. Zeige, dass $W$ denselben Erwartungswert wie $Y$, aber eine kleinere Varianz hat. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $P(Y=0)=\frac{1}{4}$, $P(Y=2)=\frac{1}{2}$, $P(Y=4)=\frac{1}{4}$; $E(Y)=2$. **b)** $E(W)=2=E(Y)$; $V(W)=1<V(Y)=2$.

**LÖSUNGSWEG**

1. a) $Y$ nimmt die Werte 0, 2 und 4 an mit $P(Y=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(Y=2)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $P(Y=4)=\frac{1}{4}$:

| $y$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $P(Y=y)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

(1 BE)

2. a) $E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}=0+1+1=2$ (1 BE)

3. b) $E(W)=3\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=2=E(Y)$ (1 BE)

4. b) $V(Y)=(0-2)^2\cdot\frac{1}{4}+(2-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(4-2)^2\cdot\frac{1}{4}=1+0+1=2$ und $V(W)=(3-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(1-2)^2\cdot\frac{1}{2}=1$, also $V(W)<V(Y)$ (alternativ mit $V=E(Y^2)-E(Y)^2$, z. B. $V(Y)=6-4=2$) (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei a) wird $P(Y=2)=\frac{1}{3}$ angesetzt, weil die drei Werte 0, 2 und 4 als gleich wahrscheinlich angesehen werden; die Ergebnisse (Zahl, Kopf) und (Kopf, Zahl) führen aber beide zu 2 Punkten. Bei b) werden die Abweichungen vom Erwartungswert nicht quadriert; dann ergibt sich für beide Zufallsgrößen der Wert 0.

**Aufgabe 3**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Am Tag der offenen Tür einer Schule zieht man gegen einen Einsatz von 1,50 € eine Karte aus einer Box mit zehn Karten. Eine Karte zeigt einen Stern, drei Karten zeigen ein Herz, die übrigen sechs Karten sind leer. Bei einem Stern werden 6 € ausgezahlt, bei einem Herz 2 €, bei einer leeren Karte nichts.

a) Ermittle den Erwartungswert des Gewinns eines Spielers pro Spiel. (2 BE)

b) Die Auszahlung für ein Herz soll so geändert werden, dass das Spiel fair ist. Bestimme diese Auszahlung. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a) Der Erwartungswert des Gewinns beträgt $-0{,}3$, der Spieler verliert im Mittel 0,30 € pro Spiel. b) Für ein Herz müssen 3 € ausgezahlt werden.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Erwartete Auszahlung in Euro: $6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$ (1 BE)
2. a) Erwarteter Gewinn: $1{,}2 - 1{,}5 = -0{,}3$, der Spieler verliert im Mittel 0,30 € pro Spiel (Probe mit den Gewinnen $4{,}5$; $0{,}5$; $-1{,}5$: $0{,}45 + 0{,}15 - 0{,}9 = -0{,}3$). (1 BE)
3. b) Fair heißt: erwartete Auszahlung gleich Einsatz. Mit der Auszahlung $a$ für ein Herz: $6 \cdot \frac{1}{10} + a \cdot \frac{3}{10} = 1{,}5$ (1 BE)
4. b) $0{,}3a = 0{,}9 \Rightarrow a = 3$; für ein Herz müssen 3 € ausgezahlt werden. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei a) wird nur die erwartete Auszahlung von 1,20 € angegeben und der Einsatz nicht abgezogen. Bei b) wird mit den Gewinnen (Auszahlung minus Einsatz) gerechnet, deren Erwartungswert aber gleich 1,5 statt gleich 0 gesetzt; bei einem fairen Spiel ist der erwartete Gewinn 0.

**Aufgabe 4**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Lea hat einen Kreisel gebaut, der nach dem Drehen entweder auf einer roten oder auf einer blauen Fläche liegen bleibt. Sie vermutet, dass der Kreisel seltener auf „Rot“ als auf „Blau“ fällt. Sie dreht den Kreisel zehnmal und testet die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}5$, wobei $p$ die Wahrscheinlichkeit für „Rot“ ist. Die Zufallsgröße $X$ gibt an, wie oft dabei „Rot“ erzielt wird.

a) Zeige, dass für $p = 0{,}5$ gilt: $P(X \leq 2) = \frac{56}{1024}$. (2 BE)

b) Bestimme die Entscheidungsregel des Tests auf einem Signifikanzniveau von 5 %. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $P(X \leq 2) = \frac{1+10+45}{1024} = \frac{56}{1024}$. **b)** $H_0$ **wird abgelehnt, wenn der Kreisel höchstens einmal „Rot“ zeigt; Ablehnungsbereich** $\{0; 1\}$**.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) $X$ ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}5$; jede Folge von zehn Ergebnissen hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}5^{10} = \frac{1}{1024}$. (1 BE)
2. a) $P(X \leq 2) = \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right) \cdot \frac{1}{1024} = \frac{1+10+45}{1024} = \frac{56}{1024}$ (1 BE)
3. b) Linksseitiger Test mit Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; k\}$, gesucht ist das größte $k$ mit $P(X \leq k) \leq 0{,}05$; wegen $0{,}05 \cdot 1024 = 51{,}2$ gilt $P(X \leq 2) = \frac{56}{1024} > 0{,}05$ und $P(X \leq 1) = \frac{11}{1024} < 0{,}05$, also $k = 1$. (1 BE)
4. b) Entscheidungsregel: Zeigt der Kreisel höchstens einmal „Rot“, wird $H_0$ abgelehnt; bei zwei oder mehr Ergebnissen „Rot“ wird $H_0$ nicht abgelehnt. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei b) wird $k = 2$ gewählt, weil $\frac{56}{1024}$ nahe bei 5 % liegt; tatsächlich ist $P(X \leq 2) \approx 5{,}5\,\%$ und damit größer als das Signifikanzniveau. Bei a) wird nur $P(X = 2) = \frac{45}{1024}$ berechnet und die Fälle $X = 0$ und $X = 1$ werden vergessen.

## Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Quiz-App gibt es zu jeder Frage vier Antworten, von denen genau eine richtig ist. Um zu prüfen, ob eine Person nur rät, stellt die App ihr vier Fragen. Getestet wird die Nullhypothese „Die Person rät; die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort beträgt bei jeder Frage $\frac{1}{4}$." Sie wird abgelehnt, wenn die Person mindestens drei der vier Fragen richtig beantwortet.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (2 BE)

b) Beschreibe den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechne seine Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Person jede Frage mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ richtig beantwortet. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a) $P(X \geq 3) = \frac{13}{256} \approx 0{,}051$. b) Die Person rät nicht, beantwortet aber höchstens zwei Fragen richtig, sodass $H_0$ nicht abgelehnt wird; Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{16} = 0{,}6875$.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Fehler 1. Art: $H_0$ wird abgelehnt, obwohl die Person rät. $X$: Anzahl der richtigen Antworten, binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{1}{4}$. (1 BE)
2. a) $P(X \geq 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{12}{256} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} \approx 0{,}051$, die Regel hat also ein Signifikanzniveau von knapp $5{,}1\,\%$. (1 BE)
3. b) Fehler 2. Art: Die Person rät nicht, beantwortet aber höchstens zwei Fragen richtig; die Nullhypothese wird also nicht abgelehnt, obwohl sie falsch ist, und die App hält die Person weiterhin für ratend. (1 BE)
4. b) Mit $p = \frac{1}{2}$: $P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 3) = 1 - \left(4 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$ (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei a) wird nur $P(X = 3) = \frac{12}{256}$ berechnet und der Fall von vier richtigen Antworten vergessen. Bei b) wird mit $p = \frac{1}{4}$ statt mit $p = \frac{1}{2}$ gerechnet; ein Fehler 2. Art setzt voraus, dass die Nullhypothese falsch ist.

## Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Ein Betrieb stellt Fahrradschläuche her. Jeder Schlauch wird nach der Herstellung geprüft und in eine von drei Klassen eingeteilt:

| Klasse | Anteil | Gewinn pro Schlauch |
|---|---|---|
| einwandfrei | 85 % | 1,20 € |
| B-Ware (kleiner optischer Mangel, wird günstiger verkauft) | 11 % | 0,30 € |
| Ausschuss (wird entsorgt) | 4 % | Verlust von 0,80 € |

Die Zufallsgröße $G$ beschreibt den Gewinn in Euro für einen zufällig ausgewählten Schlauch.

a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $G$ in einer Tabelle dar und berechne den Erwartungswert von $G$. (3 BE)

b) Berechne die Standardabweichung von $G$. An einem Arbeitstag werden 2400 Schläuche hergestellt. Ermittle den zu erwartenden Gewinn für diese Tagesproduktion. (3 BE)

Der Betrieb schafft eine neue Maschine an und möchte sie nur dann dauerhaft einsetzen, wenn sich der Ausschussanteil von 4 % nachweislich verringert hat. Dazu werden 500 auf der neuen Maschine hergestellte Schläuche zufällig ausgewählt und geprüft. Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}04$ auf einem Signifikanzniveau von 5 %, wobei $p$ der Ausschussanteil der neuen Maschine ist. Die Anzahl der Schläuche mit Ausschuss in der Stichprobe soll als binomialverteilt angenommen werden.

c) Begründe die Wahl der Nullhypothese und bestimme die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

d) Beschreibe den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Berechne seine Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass der Ausschussanteil der neuen Maschine tatsächlich 2 % beträgt. (4 BE)

e) Außerdem soll geprüft werden, ob sich der Anteil der B-Ware von 11 % mit der neuen Maschine in die eine oder die andere Richtung verändert hat. Dazu werden 400 Schläuche der neuen Maschine zufällig ausgewählt; die Anzahl der Schläuche mit B-Ware soll als binomialverteilt angenommen werden. Bestimme für den Test der Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}11$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % den Annahmebereich, wobei $p$ hier der Anteil der B-Ware ist. (4 BE)

**ERGEBNIS**

**a) $E(G) = 1{,}021$ (Euro). b) $\sigma(G) \approx 0{,}466$ (Euro); erwarteter Tagesgewinn 2450,40 €. c) $H_0$ wird abgelehnt, wenn höchstens 12 der 500 Schläuche Ausschuss sind ($P(X \leq 12) \approx 0{,}0362$). d) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art $\approx 0{,}2065$, also etwa 20,7 %. e) Annahmebereich $\{32; 33; \ldots; 57\}$.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Verteilung von $G$:

| $g$ | $1{,}2$ | $0{,}3$ | $-0{,}8$ |
|---|---|---|---|
| $P(G = g)$ | $0{,}85$ | $0{,}11$ | $0{,}04$ |

(1 BE)

2. a) $E(G) = 1{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}3 \cdot 0{,}11 + (-0{,}8) \cdot 0{,}04 = 1{,}02 + 0{,}033 - 0{,}032$ (1 BE)

3. a) $E(G) = 1{,}021$; der Betrieb erzielt im Mittel etwa 1,02 € Gewinn pro Schlauch. (1 BE)

4. b) $E(G^2) = 1{,}44 \cdot 0{,}85 + 0{,}09 \cdot 0{,}11 + 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 1{,}2595$, also $V(G) = 1{,}2595 - 1{,}021^2 = 0{,}217059$ (alternativ über $V(G) = \sum (g - E(G))^2 \cdot P(G = g)$ mit demselben Ergebnis) (1 BE)

5. b) $\sigma(G) = \sqrt{0{,}217059} \approx 0{,}466$ (Euro) (1 BE)

6. b) Erwarteter Gewinn der Tagesproduktion: $2400 \cdot 1{,}021 = 2450{,}4$, also 2450,40 €. (1 BE)

7. c) Bei $H_0 : p \geq 0{,}04$ ist die Wahrscheinlichkeit, die Maschine einzusetzen, obwohl sie den Ausschussanteil nicht verringert, höchstens 5 %; eine Ablehnung von $H_0$ ist damit der vom Betrieb verlangte abgesicherte Nachweis der Verbesserung. (1 BE)

8. c) $X$: Anzahl der Schläuche mit Ausschuss in der Stichprobe, binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}04$ ($\mu = 20$). Linksseitiger Test mit Ablehnungsbereich $\{0; \ldots; k\}$; gesucht ist das größte $k$ mit $P(X \leq k) \leq 0{,}05$. (1 BE)

9. c) $P(X \leq 12) \approx 0{,}0362 \leq 0{,}05$ (1 BE)

10. c) $P(X \leq 13) \approx 0{,}0623 > 0{,}05$, also $k = 12$. (1 BE)

11. c) Entscheidungsregel: Sind höchstens 12 der 500 Schläuche Ausschuss, wird $H_0$ abgelehnt und die neue Maschine dauerhaft eingesetzt; bei 13 oder mehr Schläuchen mit Ausschuss wird $H_0$ nicht abgelehnt. (1 BE)

12. d) Fehler 2. Art: Die neue Maschine produziert tatsächlich weniger Ausschuss, in der Stichprobe sind aber mindestens 13 Schläuche Ausschuss; $H_0$ wird nicht abgelehnt und die bessere Maschine wird nicht dauerhaft eingesetzt. (1 BE)

13. d) Mit $p = 0{,}02$: gesucht ist $P(X \geq 13)$. (1 BE)

14. d) $P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) \approx 1 - 0{,}7935$ (1 BE)

15. d) $P(X \geq 13) \approx 0{,}2065$, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt also etwa 20,7 %. (1 BE)

16. e) $Y$: Anzahl der Schläuche mit B-Ware unter 400, binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0{,}11$ ($\mu = 44$). Zweiseitiger Test: Auf jeder Seite darf die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 2,5 % betragen. (1 BE)

17. e) Linke Grenze: größtes $k$ mit $P(Y \leq k) \leq 0{,}025$; $P(Y \leq 31) \approx 0{,}0192$ und $P(Y \leq 32) \approx 0{,}0290$, also $k = 31$. (1 BE)

18. e) Rechte Grenze: kleinstes $m$ mit $P(Y \geq m) \leq 0{,}025$; $P(Y \geq 57) = 1 - P(Y \leq 56) \approx 0{,}0260$ und $P(Y \geq 58) = 1 - P(Y \leq 57) \approx 0{,}0183$, also $m = 58$. (1 BE)

19. e) Annahmebereich: $\{32; 33; \ldots; 57\}$; liegt die Anzahl der Schläuche mit B-Ware außerhalb dieses Bereichs, wird $H_0$ abgelehnt. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei c) wird $k = 13$ gewählt, weil $P(X \leq 13) \approx 0{,}062$ nahe bei 5 % liegt; dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art größer als das Signifikanzniveau. Bei e) wird auf jeder Seite mit 5 % statt mit 2,5 % gerechnet, was den zu kleinen Annahmebereich $\{34; 35; \ldots; 55\}$ ergibt.