Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · STOCHASTIK

Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **19 BE** · zusammen **39 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm und Vierfeldertafel

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Die acht gleich großen Seitenflächen eines regelmäßigen Oktaeders tragen die Zahlen 1 bis 8. Das Oktaeder wird zweimal nacheinander geworfen; gewertet wird die Zahl der unten liegenden Fläche.

a) Die beiden erzielten Zahlen werden addiert. Weise durch eine Rechnung nach, dass die Summe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{64}$ genau 6 beträgt. (2 BE)

b) Der Term $1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei diesen zwei Würfen an. Formuliere dieses Ereignis in Worten und erläutere, wie der Term zustande kommt. (2 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Schale liegen sechs äußerlich nicht unterscheidbare Pralinen, von denen vier mit Vollmilchschokolade und zwei mit Zartbitterschokolade überzogen sind. Aus der Schale werden zufällig zwei Pralinen nacheinander ohne Zurücklegen entnommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Pralinen mit unterschiedlicher Schokoladensorte entnommen werden. (2 BE)

b) Vor dem Ziehen werden k weitere Pralinen mit Zartbitterschokolade in die Schale gelegt ($k \in \mathbb{N}$). Bestimme den Wert von k, für den die Wahrscheinlichkeit, beim anschließenden zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zwei Pralinen mit Vollmilchschokolade zu entnehmen, genau $\frac{1}{6}$ beträgt. (2 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Bei einer Untersuchung von 200 historischen Silbermünzen einer numismatischen Sammlung wird erfasst, ob die jeweilige Münze aus dem 17. Jahrhundert stammt (Ereignis S) und ob sie eine sichtbare Prägeschwäche aufweist (Ereignis F). Die nachstehende unvollständige Vierfeldertafel zeigt die absoluten Häufigkeiten:

	F	$\overline{F}$	**Summe**
S	30		120
$\overline{S}$		60	
Summe			200

Aus dem Bestand der 200 Münzen wird eine Münze zufällig ausgewählt.

a) Ergänze die fehlenden Werte der Vierfeldertafel und bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(S \cup F)$. (2 BE)

b) Die zufällig ausgewählte Münze weist eine sichtbare Prägeschwäche auf. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Münze nicht aus dem 17. Jahrhundert stammt. (2 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Urne befinden sich genau 12 Kugeln, von denen 8 Kugeln rot und 4 Kugeln weiß sind. Unter den 8 roten Kugeln tragen genau 6 den Buchstaben A. Unter den 4 weißen Kugeln tragen n Kugeln den Buchstaben A ($n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$). Es wird eine Kugel zufällig aus der Urne gezogen. Betrachtet werden die Ereignisse:

R: „Die gezogene Kugel ist rot.“
A: „Die gezogene Kugel trägt den Buchstaben A.“

a) Berechne für $n = 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(R)$. (2 BE)

b) Bestimme den Wert von n so, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Softwareprogramm durchläuft nacheinander zwei automatisierte Prüfmodule. Das erste Prüfmodul stuft einen Programmcode mit der Wahrscheinlichkeit p ($p \in]0;1[$) als fehlerfrei ein (Ereignis E_1). Wird der Code im ersten Modul als fehlerfrei eingestuft, so bestätigt das zweite Prüfmodul dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ (Ereignis E_2). Wird der Code hingegen im ersten Modul nicht als fehlerfrei eingestuft ($\overline{E_1}$), so stuft ihn das zweite Prüfmodul dennoch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ als fehlerfrei ein (E_2).

a) Zeige, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zweite Prüfmodul den Programmcode als fehlerfrei einstuft, durch den Term $\frac{3}{5}p + \frac{1}{5}$ darstellen lässt. (2 BE)

b) Nun ist bekannt, dass das zweite Prüfmodul den Programmcode als fehlerfrei eingestuft hat. Unter dieser Bedingung beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bereits das erste Prüfmodul den Code als fehlerfrei eingestuft hatte, $\frac{8}{9}$. Ermittle den Wert von p. (2 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

In einem Batteriewerk werden Lithium-Eisenphosphat-Akkuzellen für Elektrofahrzeuge auf zwei parallelen Fertigungslinien hergestellt. Erfahrungsgemäß stammen $65\,\%$ aller produzierten Akkuzellen aus Fertigungslinie 1 (Ereignis L_1), die übrigen Zellen aus Fertigungslinie 2 (Ereignis $\overline{L_1}$). Nach der Produktion durchläuft jede Zelle einen Hochstrom-Kapazitätstest. Zellen mit besonders geringem Innenwiderstand erhalten das Gütesiegel „Premium-Zelle“ (Ereignis G), alle anderen Zellen werden als „Standard-Zelle“ (Ereignis $\overline{G}$) eingestuft. Insgesamt erhalten $78\,\%$ aller produzierten Akkuzellen das Gütesiegel „Premium-Zelle“. Zudem ist bekannt, dass $52\,\%$ aller produzierten Akkuzellen aus Fertigungslinie 1 stammen und zugleich das Gütesiegel „Premium-Zelle“ erhalten.

a) Stelle den beschriebenen Sachverhalt für eine zufällig ausgewählte Akkuzelle mithilfe der Ereignisse L_1 und G in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Beschreibe das Ereignis $\overline{L_1} \cup \overline{G}$ im Sachzusammenhang und bestimme dessen Wahrscheinlichkeit. (4 BE)

b) Untersuche rechnerisch, ob die Ereignisse L_1 und G stochastisch unabhängig sind. Beurteile zudem die folgende Aussage:
„Unter den Standard-Zellen ist der Anteil derjenigen, die aus Fertigungslinie 1 stammen, mehr als anderthalbmal so groß wie der Anteil der Zellen aus Fertigungslinie 2.“ (4 BE)

c) Im Anschluss an den Kapazitätstest durchläuft jede Akkuzelle einen optischen Laserscan zur Prüfung der Gehäuseoberfläche. Erfahrungsgemäß weisen $2\,\%$ der Premium-Zellen und $5\,\%$ der Standard-Zellen minimale Kratzer am Gehäuse auf (Ereignis K). Beschreibe ein zweistufiges Baumdiagramm mit den Ereignissen G und $\overline{G}$ in der ersten Stufe sowie K und $\overline{K}$ in der zweiten Stufe durch Angabe aller Zweigwahrscheinlichkeiten. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Akkuzelle minimale Kratzer am Gehäuse aufweist, und ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einer Zelle mit minimalen Kratzern um eine Standard-Zelle handelt. (4 BE)

d) Für Belastungstests in einem Prüflabor wird eine Transportbox mit genau 25 Akkuzellen gepackt, unter denen sich 19 Premium-Zellen und 6 Standard-Zellen befinden. Ein Prüfingenieur entnimmt dieser Transportbox zufällig und ohne Zurücklegen nacheinander drei Akkuzellen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: „Alle drei entnommenen Akkuzellen sind Premium-Zellen.“
E_2: „Unter den drei entnommenen Akkuzellen befinden sich mindestens zwei Standard-Zellen.“ (4 BE)

e) Aus der laufenden Gesamtproduktion, in der der Anteil der Premium-Zellen konstant $78\,\%$ beträgt, werden nacheinander zufällig Akkuzellen entnommen (Modell „Ziehen mit Zurücklegen“). Ermittle, wie viele Akkuzellen mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99\,\%$ mindestens eine Standard-Zelle darunter ist. (3 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm und Vierfeldertafel

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Die acht gleich großen Seitenflächen eines regelmäßigen Oktaeders tragen die Zahlen 1 bis 8. Das Oktaeder wird zweimal nacheinander geworfen; gewertet wird die Zahl der unten liegenden Fläche.

a) Die beiden erzielten Zahlen werden addiert. Weise durch eine Rechnung nach, dass die Summe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{64}$ genau 6 beträgt. (2 BE)

b) Der Term $1-\left(\frac{5}{8}\right)^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei diesen zwei Würfen an. Formuliere dieses Ereignis in Worten und erläutere, wie der Term zustande kommt. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $P(\text{Summe ist } 6)=\frac{5}{64}$

b) Ereignis: „Mindestens einmal wird eine Zahl größer als 5 gewürfelt.“

LÖSUNGSWEG

1. a) Da das regelmäßige Oktaeder zweimal geworfen wird, gibt es insgesamt $8\cdot 8=64$ gleich wahrscheinliche Ergebnisse $(a\mid b)$ mit $a,b\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. (1 BE)
2. Für die Augensumme 6 sind genau die fünf Ergebnisse $(1\mid 5)$, $(2\mid 4)$, $(3\mid 3)$, $(4\mid 2)$ und $(5\mid 1)$ günstig, sodass nach der Laplace-Regel $P(\text{Summe ist } 6)=\frac{5}{64}$ folgt. (1 BE)
3. b) Ereignis im Sachzusammenhang: „Mindestens einmal wird eine Zahl größer als 5 gewürfelt.“ (1 BE)
4. Begründung: Bei einem einzelnen Wurf beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl höchstens 5 (Zahlen 1 bis 5) genau $\frac{5}{8}$. Nach der Pfadmultiplikationsregel ist $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, in beiden Würfen jeweils eine Zahl höchstens 5 zu erzielen; über das Gegenereignis liefert $1-\left(\frac{5}{8}\right)^2$ die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Zahl größer als 5. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Bei Teilaufgabe a) wird das Ergebnis $(3\mid 3)$ vergessen oder doppelt gezählt. Bei Teilaufgabe b) wird das Gegenereignis von „beide Zahlen sind höchstens 5“ fälschlicherweise als „beide Zahlen sind größer als 5“ statt als „mindestens eine Zahl ist größer als 5“ formuliert.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Schale liegen sechs äußerlich nicht unterscheidbare Pralinen, von denen vier mit Vollmilchschokolade und zwei mit Zartbitterschokolade überzogen sind. Aus der Schale werden zufällig zwei Pralinen nacheinander ohne Zurücklegen entnommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Pralinen mit unterschiedlicher Schokoladensorte entnommen werden. (2 BE)

b) Vor dem Ziehen werden k weitere Pralinen mit Zartbitterschokolade in die Schale gelegt ($k \in \mathbb{N}$). Bestimme den Wert von k, für den die Wahrscheinlichkeit, beim anschließenden zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zwei Pralinen mit Vollmilchschokolade zu entnehmen, genau $\frac{1}{6}$ beträgt. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $P = \frac{8}{15}$
b) $k = 3$

LÖSUNGSWEG

1. a) Für zwei unterschiedliche Sorten gibt es im Baumdiagramm die beiden Pfade (Vollmilch, Zartbitter) und (Zartbitter, Vollmilch) mit den Pfadwahrscheinlichkeiten $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$ und $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$. (1 BE)

2. Nach der Pfadadditionsregel beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P = \frac{8}{30} + \frac{8}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ (alternativ über Kombinatorik: $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$). (1 BE)

3. b) Nach dem Hinzufügen von k Zartbitterpralinen befinden sich $6 + k$ Pralinen in der Schale, darunter weiterhin 4 Vollmilchpralinen. Die Pfadmultiplikationsregel liefert die Gleichung $\frac{4}{6+k} \cdot \frac{3}{5+k} = \frac{1}{6}$. (1 BE)

4. Umformen führt auf $(6 + k)(5 + k) = 72$. Wegen $k \in \mathbb{N}$ und $9 \cdot 8 = 72$ folgt $6 + k = 9$ und damit eindeutig $k = 3$ (die zweite reelle Lösung $k = -14$ entfällt). (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe a) wird nur einer der beiden günstigen Pfade berücksichtigt, sodass $\frac{4}{15}$ statt $\frac{8}{15}$ berechnet wird. In Teilaufgabe b) wird beim zweiten Zug vergessen, die Gesamtzahl der Pralinen um 1 zu verringern.

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Bei einer Untersuchung von 200 historischen Silbermünzen einer numismatischen Sammlung wird erfasst, ob die jeweilige Münze aus dem 17. Jahrhundert stammt (Ereignis S) und ob sie eine sichtbare Prägeschwäche aufweist (Ereignis F). Die nachstehende unvollständige Vierfeldertafel zeigt die absoluten Häufigkeiten:

	F	$\overline{F}$	**Summe**
S	30		120
$\overline{S}$		60	
Summe			200

Aus dem Bestand der 200 Münzen wird eine Münze zufällig ausgewählt.

a) Ergänze die fehlenden Werte der Vierfeldertafel und bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(S \cup F)$. (2 BE)

b) Die zufällig ausgewählte Münze weist eine sichtbare Prägeschwäche auf. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Münze nicht aus dem 17. Jahrhundert stammt. (2 BE)

ERGEBNIS

a) Fehlende Werte: $|S \cap \overline{F}| = 90$, $|\overline{S} \cap F| = 20$, $|\overline{S}| = 80$, $|F| = 50$, $|\overline{F}| = 150$; $P(S \cup F) = \frac{7}{10} = 0{,}7$

b) $P_F(\overline{S}) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

LÖSUNGSWEG

1. a) Aus den Zeilen- und Spaltensummen ergeben sich die fehlenden absoluten Häufigkeiten: $|S \cap \overline{F}| = 120 - 30 = 90$, $|\overline{S}| = 200 - 120 = 80$, $|\overline{S} \cap F| = 80 - 60 = 20$ sowie die Spaltensummen $|F| = 30 + 20 = 50$ und $|\overline{F}| = 90 + 60 = 150$. (1 BE)
2. Für die Vereinigungsmenge gilt über das Gegenereignis $P(S \cup F) = 1 - P(\overline{S} \cap \overline{F}) = 1 - \frac{60}{200} = \frac{140}{200} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ (alternativ mit dem Additionssatz: $\frac{120+50-30}{200} = \frac{7}{10}$). (1 BE)
3. b) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(\overline{S}) = \frac{P(\overline{S} \cap F)}{P(F)}$. (1 BE)
4. Einsetzen der Werte aus der Vierfeldertafel liefert $P_F(\overline{S}) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Bei Teilaufgabe a) wird $P(S \cup F)$ durch bloße Addition $\frac{120}{200} + \frac{50}{200} = \frac{170}{200}$ berechnet, ohne die Schnittmenge $|S \cap F| = 30$ abzuziehen. Bei Teilaufgabe b) wird die Bedingung mit der Schnittmenge verwechselt und $\frac{20}{200}$ statt $\frac{20}{50}$ angegeben.

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Urne befinden sich genau 12 Kugeln, von denen 8 Kugeln rot und 4 Kugeln weiß sind. Unter den 8 roten Kugeln tragen genau 6 den Buchstaben A. Unter den 4 weißen Kugeln tragen n Kugeln den Buchstaben A ($n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$). Es wird eine Kugel zufällig aus der Urne gezogen. Betrachtet werden die Ereignisse:

R: „Die gezogene Kugel ist rot."
A: „Die gezogene Kugel trägt den Buchstaben A."

a) Berechne für $n = 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(R)$. (2 BE)

b) Bestimme den Wert von n so, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. (2 BE)

ERGEBNIS
a) $P_A(R) = \frac{6}{7}$
b) $n = 3$

LÖSUNGSWEG
1. a) Für $n = 1$ tragen insgesamt $6 + 1 = 7$ der 12 Kugeln den Buchstaben A, sodass $P(A) = \frac{7}{12}$ und $P(R \cap A) = \frac{6}{12}$ gilt. (1 BE)
2. Damit folgt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(R) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$. (1 BE)
3. b) Für stochastische Unabhängigkeit von R und A muss $P(R \cap A) = P(R) \cdot P(A)$ gelten, wobei $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $P(R \cap A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ und $P(A) = \frac{6+n}{12}$ ist. (1 BE)
4. Aus der Gleichung $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6+n}{12}$ folgt $\frac{1}{2} = \frac{6+n}{18}$ und damit $6 + n = 9$, also $n = 3$ (alternativ über gleiche Anteile: $\frac{6}{8} = \frac{n}{4} \implies n = 3$). (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Bei Teilaufgabe a) wird $P_R(A) = \frac{6}{8}$ statt der geforderten bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(R) = \frac{6}{7}$ berechnet. Bei Teilaufgabe b) wird in $P(A)$ nur die Anzahl n der weißen Kugeln mit Buchstabe A statt der Gesamtzahl $6 + n$ eingesetzt.

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Softwareprogramm durchläuft nacheinander zwei automatisierte Prüfmodule. Das erste Prüfmodul stuft einen Programmcode mit der Wahrscheinlichkeit p ($p \in]0; 1[$) als fehlerfrei ein (Ereignis E_1). Wird der Code im ersten Modul als fehlerfrei eingestuft, so bestätigt das zweite Prüfmodul dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ (Ereignis E_2). Wird der Code hingegen im ersten Modul nicht als fehlerfrei eingestuft ($\overline{E_1}$), so stuft ihn das zweite Prüfmodul dennoch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ als fehlerfrei ein (E_2).

a) Zeige, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zweite Prüfmodul den Programmcode als fehlerfrei einstuft, durch den Term $\frac{3}{5}p + \frac{1}{5}$ darstellen lässt. (2 BE)

b) Nun ist bekannt, dass das zweite Prüfmodul den Programmcode als fehlerfrei eingestuft hat. Unter dieser Bedingung beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bereits das erste Prüfmodul den Code als fehlerfrei eingestuft hatte, $\frac{8}{9}$. Ermittle den Wert von p. (2 BE)

ERGEBNIS
a) Nachweis von $P(E_2) = \frac{3}{5}p + \frac{1}{5}$ über die Pfadregeln
b) $p = \frac{2}{3}$

LÖSUNGSWEG

1. a) Nach der Pfadmultiplikations- und der Pfadadditionsregel gilt $P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2) = p \cdot \frac{4}{5} + (1-p) \cdot \frac{1}{5}$. (1 BE)
2. Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt $P(E_2) = \frac{4}{5}p + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p = \frac{3}{5}p + \frac{1}{5}$. (1 BE)
3. b) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{E_2}(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{8}{9}$ ergibt sich mit dem Term aus Teilaufgabe a) die Gleichung $\frac{\frac{4}{5}p}{\frac{3}{5}p+\frac{1}{5}} = \frac{8}{9}$. (1 BE)
4. Erweitern des Bruchs mit 5 liefert $\frac{4p}{3p+1} = \frac{8}{9} \iff 36p = 24p + 8 \iff 12p = 8$, woraus $p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ folgt. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Aufstellen von $P(E_2)$ wird der zweite Pfad $(\overline{E_1}, E_2)$ vergessen oder $(1-p)$ fehlerhaft ausmultipliziert. In Teilaufgabe b) wird $P(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{9}$ statt der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{E_2}(E_1) = \frac{8}{9}$ angesetzt.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

In einem Batteriewerk werden Lithium-Eisenphosphat-Akkuzellen für Elektrofahrzeuge auf zwei parallelen Fertigungslinien hergestellt. Erfahrungsgemäß stammen $65\,\%$ aller produzierten Akkuzellen aus Fertigungslinie 1 (Ereignis L_1), die übrigen Zellen aus Fertigungslinie 2 (Ereignis $\overline{L_1}$). Nach der Produktion durchläuft jede Zelle einen Hochstrom-Kapazitätstest. Zellen mit besonders geringem Innenwiderstand erhalten das Gütesiegel „Premium-Zelle“ (Ereignis G), alle anderen Zellen werden als „Standard-Zelle“ (Ereignis $\overline{G}$) eingestuft. Insgesamt erhalten $78\,\%$ aller produzierten Akkuzellen das Gütesiegel „Premium-Zelle“. Zudem ist bekannt, dass $52\,\%$ aller produzierten Akkuzellen aus Fertigungslinie 1 stammen und zugleich das Gütesiegel „Premium-Zelle“ erhalten.

a) Stelle den beschriebenen Sachverhalt für eine zufällig ausgewählte Akkuzelle mithilfe der Ereignisse L_1 und G in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Beschreibe das Ereignis $\overline{L_1} \cup \overline{G}$ im Sachzusammenhang und bestimme dessen Wahrscheinlichkeit. (4 BE)

b) Untersuche rechnerisch, ob die Ereignisse L_1 und G stochastisch unabhängig sind. Beurteile zudem die folgende Aussage:
„Unter den Standard-Zellen ist der Anteil derjenigen, die aus Fertigungslinie 1 stammen, mehr als anderthalbmal so groß wie der Anteil der Zellen aus Fertigungslinie 2.“ (4 BE)

c) Im Anschluss an den Kapazitätstest durchläuft jede Akkuzelle einen optischen Laserscan zur Prüfung der Gehäuseoberfläche. Erfahrungsgemäß weisen $2\,\%$ der Premium-Zellen und $5\,\%$ der Standard-Zellen minimale Kratzer am Gehäuse auf (Ereignis K). Beschreibe ein zweistufiges Baumdiagramm mit den Ereignissen G und $\overline{G}$ in der ersten Stufe sowie K und $\overline{K}$ in der zweiten Stufe durch Angabe aller Zweigwahrscheinlichkeiten. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Akkuzelle minimale Kratzer am Gehäuse aufweist, und ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einer Zelle mit minimalen Kratzern um eine Standard-Zelle handelt. (4 BE)

d) Für Belastungstests in einem Prüflabor wird eine Transportbox mit genau 25 Akkuzellen gepackt, unter denen sich 19 Premium-Zellen und 6 Standard-Zellen befinden. Ein Prüfingenieur entnimmt dieser Transportbox zufällig und ohne Zurücklegen nacheinander drei Akkuzellen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: „Alle drei entnommenen Akkuzellen sind Premium-Zellen.“
E_2: „Unter den drei entnommenen Akkuzellen befinden sich mindestens zwei Standard-Zellen.“ (4 BE)

e) Aus der laufenden Gesamtproduktion, in der der Anteil der Premium-Zellen konstant $78\,\%$ beträgt, werden nacheinander zufällig Akkuzellen entnommen (Modell „Ziehen mit Zurücklegen“). Ermittle, wie viele Akkuzellen mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99\,\%$ mindestens eine Standard-Zelle darunter ist. (3 BE)

ERGEBNIS

a) Vierfeldertafel: $P(L_1 \cap G) = 0{,}52$, $P(L_1 \cap \overline{G}) = 0{,}13$, $P(L_1) = 0{,}65$; $P(\overline{L_1} \cap G) = 0{,}26$, $P(\overline{L_1} \cap \overline{G}) = 0{,}09$, $P(\overline{L_1}) = 0{,}35$; $P(G) = 0{,}78$, $P(\overline{G}) = 0{,}22$. **Beschreibung: Die Zelle stammt aus Fertigungslinie 2 oder ist eine Standard-Zelle;** $P(\overline{L_1} \cup \overline{G}) = 0{,}48$

b) L_1 **und** G **sind stochastisch abhängig** ($0{,}65 \cdot 0{,}78 = 0{,}507 \neq 0{,}52$). **Die Aussage ist falsch, da** $\frac{0{,}13}{0{,}09} = \frac{13}{9} \approx 1{,}444 < 1{,}5$ **gilt.**

c) Baumdiagramm: 1. Stufe $P(G) = 0{,}78$, $P(\overline{G}) = 0{,}22$; **2. Stufe** $P_G(K) = 0{,}02$, $P_G(\overline{K}) = 0{,}98$, $P_{\overline{G}}(K) = 0{,}05$, $P_{\overline{G}}(\overline{K}) = 0{,}95$. **Ergebnisse:** $P(K) = 0{,}0266$; $P_K(\overline{G}) = \frac{55}{133} \approx 0{,}4135$

d) $P(E_1) = \frac{969}{2300} \approx 0{,}4213$; $P(E_2) = \frac{61}{460} \approx 0{,}1326$

e) Mindestens $n = 19$ **Akkuzellen**

LÖSUNGSWEG

1. a) Aus $P(L_1) = 0{,}65$, $P(G) = 0{,}78$ und $P(L_1 \cap G) = 0{,}52$ ergeben sich durch Subtraktion die übrigen Felder der Vierfeldertafel:

	G	$\overline{G}$	**Summe**
L_1	$0{,}52$	$0{,}13$	$0{,}65$
$\overline{L_1}$	$0{,}26$	$0{,}09$	$0{,}35$
Summe	$0{,}78$	$0{,}22$	$1{,}00$

(2 BE)

2. Das Ereignis $\overline{L_1} \cup \overline{G} = \overline{L_1 \cap G}$ bedeutet im Sachzusammenhang, dass die ausgewählte Akkuzelle aus Fertigungslinie 2 stammt oder als Standard-Zelle eingestuft wird (also nicht zugleich aus Fertigungslinie 1 stammt und eine Premium-Zelle ist). (1 BE)

3. Für die Wahrscheinlichkeit gilt $P(\overline{L_1} \cup \overline{G}) = 1 - P(L_1 \cap G) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$. (1 BE)

4. b) Prüfung auf stochastische Unabhängigkeit: Es gilt $P(L_1) \cdot P(G) = 0{,}65 \cdot 0{,}78 = 0{,}507$. Da $P(L_1 \cap G) = 0{,}52 \neq 0{,}507$ ist, sind die Ereignisse L_1 und G stochastisch abhängig. (2 BE)

5. Unter den Standard-Zellen ($\overline{G}$) beträgt der Anteil von Fertigungslinie 1 genau $P_{\overline{G}}(L_1) = \frac{0{,}13}{0{,}22} = \frac{13}{22}$ und der Anteil von Fertigungslinie 2 genau $P_{\overline{G}}(\overline{L_1}) = \frac{0{,}09}{0{,}22} = \frac{9}{22}$. (1 BE)

6. Das Verhältnis der beiden Anteile beträgt $\frac{0{,}13}{0{,}09} = \frac{13}{9} \approx 1{,}444$. Da $1{,}444 < 1{,}5$ ist, ist der Anteil nicht mehr als anderthalbmal so groß; die Aussage ist somit falsch. (1 BE)

7. c) Beschreibung des Baumdiagramms: In der ersten Stufe führen zwei Zweige zu den Ereignissen G mit $P(G) = 0{,}78$ und $\overline{G}$ mit $P(\overline{G}) = 0{,}22$. In der zweiten Stufe verzweigt sich der Zweig von G zu K mit $P_G(K) = 0{,}02$ und zu $\overline{K}$ mit $P_G(\overline{K}) = 0{,}98$; vom Knoten $\overline{G}$ führen zwei Zweige zu K mit $P_{\overline{G}}(K) = 0{,}05$ und zu $\overline{K}$ mit $P_{\overline{G}}(\overline{K}) = 0{,}95$. (1 BE)

8. Mit den Pfadregeln folgt für die Wahrscheinlichkeit minimaler Kratzer:
$P(K) = P(G \cap K) + P(\overline{G} \cap K) = 0{,}78 \cdot 0{,}02 + 0{,}22 \cdot 0{,}05 = 0{,}0156 + 0{,}0110 = 0{,}0266$. (1 BE)

9. Die Umkehrung des Baumdiagramms (Satz von Bayes) liefert die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkratzte Zelle eine Standard-Zelle ist: $P_K(\overline{G}) = \frac{P(\overline{G} \cap K)}{P(K)} = \frac{0{,}0110}{0{,}0266} = \frac{55}{133} \approx 0{,}4135$. (2 BE)

10. d) Beim Ziehen ohne Zurücklegen gilt nach der Pfadmultiplikationsregel für drei Premium-Zellen:
$P(E_1) = \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23} = \frac{969}{2300} \approx 0{,}4213$ (alternativ über das Urnenmodell: $\frac{\binom{19}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{969}{2300}$). (2 BE)

11. Das Ereignis E_2 umfasst genau zwei oder genau drei Standard-Zellen:
$P(E_2) = 3 \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} = \frac{285+20}{2300} = \frac{305}{2300} = \frac{61}{460} \approx 0{,}1326$ (alternativ: $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{19}{1} + \binom{6}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{61}{460}$). (2 BE)

12. e) Die Wahrscheinlichkeit für eine Standard-Zelle beträgt $P(\overline{G}) = 0{,}22$, die Gegenwahrscheinlichkeit (Premium-Zelle) $P(G) = 0{,}78$. Über das Gegenereignis („alle n gezogenen Zellen sind Premium-Zellen“) lautet der Ansatz $1 - 0{,}78^n > 0{,}99$, also $0{,}78^n < 0{,}01$. (1 BE)

13. Logarithmieren und Beachten von $\ln(0{,}78) < 0$ liefert $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}78)} \approx 18{,}54$. (1 BE)

14. Da n eine natürliche Zahl sein muss, müssen mindestens $n = 19$ Akkuzellen entnommen werden. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe a) wird $\overline{L_1} \cup \overline{G}$ mit $\overline{L_1} \cap \overline{G}$ verwechselt und $0{,}09$ statt $0{,}48$ angegeben. In Teilaufgabe d) wird beim Ziehen aus der Transportbox fälschlicherweise mit Zurücklegen ($0{,}78^3$) gerechnet oder bei genau zwei Standard-Zellen der Reihenfolgefaktor 3 vergessen. In Teilaufgabe e) wird mit $0{,}22^n < 0{,}01$ statt mit der Gegenwahrscheinlichkeit $0{,}78^n < 0{,}01$ angesetzt.