Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · STOCHASTIK

Binomialverteilung

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **19 BE** · zusammen **39 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Binomialverteilung

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Eine Handballspielerin verwandelt einen Siebenmeter erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$. Sie führt vier Siebenmeter aus. Die Würfe werden als voneinander unabhängig angenommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei der vier Siebenmeter verwandelt werden. (2 BE)

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Siebenmeter nicht verwandelt wird. (2 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Urne liegen 10 Kugeln, davon 4 rote und 6 blaue. Es werden nacheinander drei Kugeln zufällig gezogen. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.

a) Die Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Begründe, dass Y in diesem Fall nicht binomialverteilt ist. (2 BE)

b) Nun werden die Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei rote Kugeln gezogen werden. (2 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 25 Fragen mit jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Ein Prüfling kreuzt bei jeder Frage zufällig und unabhängig von den übrigen Fragen eine Antwort an. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

a) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. (2 BE)

b) Stelle einen Term auf, der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der Prüfling höchstens zwei Fragen richtig beantwortet. (2 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Pendler fährt an den fünf Arbeitstagen einer Woche mit dem Bus zur Arbeit. Erfahrungsgemäß ist der Bus an einem Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 pünktlich, unabhängig von den übrigen Tagen. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Tage dieser Woche an, an denen der Bus pünktlich ist.

a) Der Term $0{,}1^5 + 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4$ gehört zu einem Ereignis über die Pünktlichkeit des Busses in dieser Woche. Formuliere dieses Ereignis in Worten. (2 BE)

b) Beurteile die folgende Aussage: „Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % ist der Bus an allen fünf Tagen der Woche pünktlich.“ (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Hersteller legt in jede Sammeltüte unabhängig von den übrigen Tüten mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 ein Glanzbild. Eine Person kauft n Sammeltüten.

a) Stelle einen Term auf, der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass mindestens eine der n Tüten ein Glanzbild enthält, und begründe deinen Term. (2 BE)

b) Bestimme die kleinste Anzahl n von Tüten, für die diese Wahrscheinlichkeit größer als 99 % ist. (2 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Ein Saatguthersteller verkauft Sonnenblumensamen in Packungen mit je 40 Samen. Erfahrungsgemäß keimt ein Samen mit der Wahrscheinlichkeit 0,85. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der keimenden Samen in einer Packung.

a) Begründe, dass X unter geeigneten Annahmen als binomialverteilt modelliert werden kann. Nenne zwei dieser Annahmen und gib die Parameter der Verteilung an. (3 BE)

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Genau 34 Samen einer Packung keimen.“

B: „Mindestens 36 Samen einer Packung keimen.“ (4 BE)

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. (3 BE)

d) Eine Packung heißt „typisch“, wenn die Anzahl der keimenden Samen höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Packung typisch ist. (4 BE)

e) Für ein Beet werden mindestens 30 keimende Pflanzen benötigt. Der Hersteller untersucht, wie viele Samen eine Packung enthalten müsste. Bestimme die kleinste Anzahl von Samen je Packung, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens 30 Samen keimen. (5 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Binomialverteilung

6 Aufgaben

5 a) $1 - 0{,}5^n$; b) $n = 7$

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Eine Handballspielerin verwandelt einen Siebenmeter erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$. Sie führt vier Siebenmeter aus. Die Würfe werden als voneinander unabhängig angenommen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei der vier Siebenmeter verwandelt werden. (2 BE)

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Siebenmeter nicht verwandelt wird. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $\frac{27}{64} \approx 0{,}4219$; **b)** $\frac{175}{256} \approx 0{,}6836$

LÖSUNGSWEG

1. Die Zufallsgröße X (Anzahl der verwandelten Siebenmeter) ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{3}{4}$. (1 BE)
2. a) $P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \approx 0{,}4219$ (1 BE)
3. b) Gegenereignis: Alle vier Siebenmeter werden verwandelt, $P(X = 4) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$. (1 BE)
4. Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0{,}6836$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In a) wird der Faktor $\binom{4}{3} = 4$ vergessen; es ergibt sich dann $\frac{27}{256}$ statt $\frac{27}{64}$. In b) wird $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ berechnet; das ist die Wahrscheinlichkeit für vier Fehlwürfe, nicht für mindestens einen Fehlwurf.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einer Urne liegen 10 Kugeln, davon 4 rote und 6 blaue. Es werden nacheinander drei Kugeln zufällig gezogen. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.

a) Die Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Begründe, dass Y in diesem Fall nicht binomialverteilt ist. (2 BE)

b) Nun werden die Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei rote Kugeln gezogen werden. (2 BE)

ERGEBNIS

a) Die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich von Zug zu Zug (zum Beispiel $\frac{4}{10}$ im ersten Zug, $\frac{3}{9}$ im zweiten Zug nach einer roten Kugel), also liegt keine Bernoulli-Kette vor; b) $\frac{36}{125} = 0{,}288$

LÖSUNGSWEG

1. a) Eine Binomialverteilung setzt eine Bernoulli-Kette voraus: unabhängige Versuche mit gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit. (1 BE)
2. Im ersten Zug ist $P(\text{rot}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Wurde im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, ist im zweiten Zug $P(\text{rot}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$. Die Trefferwahrscheinlichkeit bleibt nicht gleich, die Züge sind nicht unabhängig, also ist Y nicht binomialverteilt. (1 BE)
3. b) Mit Zurücklegen ist Y binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. (1 BE)
4. $P(Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125} = 0{,}288$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In a) wird nur $P(\text{rot}) = \frac{4}{10}$ für den ersten Zug genannt, ohne die geänderte Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug anzugeben; damit fehlt die eigentliche Begründung. In b) wird als Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{4}{6}$ (rote zu blauen Kugeln) statt $\frac{4}{10}$ verwendet.

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 25 Fragen mit jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Ein Prüfling kreuzt bei jeder Frage zufällig und unabhängig von den übrigen Fragen eine Antwort an. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

a) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. (2 BE)

b) Stelle einen Term auf, der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der Prüfling höchstens zwei Fragen richtig beantwortet. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $E(X) = 5$, $\sigma = 2$; **b)** $P(X \leq 2) = 0{,}8^{25} + 25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{24} + 300 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{23}$

LÖSUNGSWEG

1. Es gilt $n = 25$ und $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$.
2. a) $E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 0{,}2 = 5$ (1 BE)
3. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{4} = 2$ (1 BE)
4. b) „Höchstens zwei richtig“ bedeutet $X \leq 2$, also $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. (1 BE)
5. $P(X \leq 2) = 0{,}8^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{23} = 0{,}8^{25} + 25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{24} + 300 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{23}$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In a) wird der Faktor $1 - p$ vergessen und $\sqrt{25 \cdot 0{,}2} = \sqrt{5}$ als Standardabweichung angegeben. In b) steht im Term nur der Summand für $k = 2$, das ist die Wahrscheinlichkeit für „genau zwei richtige Antworten“.

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Pendler fährt an den fünf Arbeitstagen einer Woche mit dem Bus zur Arbeit. Erfahrungsgemäß ist der Bus an einem Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 pünktlich, unabhängig von den übrigen Tagen. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Tage dieser Woche an, an denen der Bus pünktlich ist.

a) Der Term $0{,}1^5 + 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4$ gehört zu einem Ereignis über die Pünktlichkeit des Busses in dieser Woche. Formuliere dieses Ereignis in Worten. (2 BE)

b) Beurteile die folgende Aussage: „Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % ist der Bus an allen fünf Tagen der Woche pünktlich." (2 BE)

ERGEBNIS

a) „Der Bus ist an höchstens einem Tag der Woche pünktlich." ($Z \leq 1$); b) $0{,}9^5 = 0{,}59049 > 0{,}5$, die Aussage ist richtig.

LÖSUNGSWEG

1. Z ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}9$.
2. a) Es gilt $P(Z = 0) = 0{,}1^5$ und $P(Z = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4 = 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4$. Der Term ist also $P(Z = 0) + P(Z = 1)$. (1 BE)
3. Ereignis: „Der Bus ist an höchstens einem Tag der Woche pünktlich." (gleichbedeutend: an mindestens vier Tagen unpünktlich) (1 BE)
4. b) $P(Z = 5) = 0{,}9^5$. Ohne Taschenrechner: Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt $0{,}9^5 = (1 - 0{,}1)^5 > 1 - 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$. Alternativ rechnet man $0{,}9^2 = 0{,}81$, $0{,}9^4 = 0{,}6561$ und $0{,}9^5 = 0{,}59049$. (1 BE)
5. Es gilt also $0{,}9^5 > 0{,}5$ (genau: $0{,}59049$), die Aussage ist richtig. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In a) wird der Term als „genau ein Tag pünktlich" gedeutet, weil nur der zweite Summand beachtet wird; der erste Summand $0{,}1^5$ steht für „an keinem Tag pünktlich". In b) wird $5 \cdot 0{,}9 = 4{,}5$ gerechnet statt $0{,}9^5$ zu bilden.

Aufgabe 5

Ergebnis: a) $1 - 0{,}5^n$**; b)** $n = 7$

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Hersteller legt in jede Sammeltüte unabhängig von den übrigen Tüten mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 ein Glanzbild. Eine Person kauft n Sammeltüten.

a) Stelle einen Term auf, der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass mindestens eine der n Tüten ein Glanzbild enthält, und begründe deinen Term. (2 BE)

b) Bestimme die kleinste Anzahl n von Tüten, für die diese Wahrscheinlichkeit größer als 99 % ist. (2 BE)

LÖSUNGSWEG

1. a) Die Anzahl der Tüten mit Glanzbild ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}5$. Das Gegenereignis zu „mindestens eine Tüte mit Glanzbild“ ist „keine Tüte mit Glanzbild“ mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}5^n$. (1 BE)
2. Gesuchter Term: $1 - 0{,}5^n$ (1 BE)
3. b) Ansatz: $1 - 0{,}5^n > 0{,}99$, also $0{,}5^n < 0{,}01$, also $2^n > 100$. (1 BE)
4. Es gilt $2^6 = 64 < 100$ und $2^7 = 128 > 100$. Die Wahrscheinlichkeit wächst mit n, daher ist $n = 7$ die kleinste Anzahl. Probe: $1 - \frac{1}{128} \approx 0{,}9922 > 0{,}99$ und $1 - \frac{1}{64} \approx 0{,}9844 < 0{,}99$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In a) wird $0{,}5^n$ statt $1 - 0{,}5^n$ angegeben; das ist die Wahrscheinlichkeit für „kein Glanzbild“. In b) wird $n = 6$ angegeben; für $n = 6$ ergibt sich aber nur $1 - \frac{1}{64} \approx 0{,}984 < 0{,}99$.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Ein Saatguthersteller verkauft Sonnenblumensamen in Packungen mit je 40 Samen. Erfahrungsgemäß keimt ein Samen mit der Wahrscheinlichkeit 0,85. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der keimenden Samen in einer Packung.

a) Begründe, dass X unter geeigneten Annahmen als binomialverteilt modelliert werden kann. Nenne zwei dieser Annahmen und gib die Parameter der Verteilung an. (3 BE)

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Genau 34 Samen einer Packung keimen.“

B: „Mindestens 36 Samen einer Packung keimen.“ (4 BE)

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. (3 BE)

d) Eine Packung heißt „typisch“, wenn die Anzahl der keimenden Samen höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Packung typisch ist. (4 BE)

e) Für ein Beet werden mindestens 30 keimende Pflanzen benötigt. Der Hersteller untersucht, wie viele Samen eine Packung enthalten müsste. Bestimme die kleinste Anzahl von Samen je Packung, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens 30 Samen keimen. (5 BE)

ERGEBNIS

a) Bernoulli-Kette der Länge $n = 40$ mit $p = 0{,}85$, also $X \sim B(40;\, 0{,}85)$; b) $P(A) \approx 0{,}1742$, $P(B) \approx 0{,}2633$; c) $E(X) = 34$, $\sigma \approx 2{,}26$; d) $P(32 \le X \le 36) \approx 0{,}7344$; e) 40 Samen je Packung

LÖSUNGSWEG

1. a) Jeder Samen ist ein Versuch mit genau zwei Ausgängen: keimt (Treffer) oder keimt nicht. (1 BE)
2. Annahmen: Die Samen keimen unabhängig voneinander, und für jeden Samen ist die Keimwahrscheinlichkeit gleich 0,85. Dann liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 40 vor. (1 BE)
3. Parameter: $n = 40$ und $p = 0{,}85$, also $X \sim B(40;\, 0{,}85)$. (1 BE)
4. b) $P(A) = P(X = 34) = \binom{40}{34} \cdot 0{,}85^{34} \cdot 0{,}15^{6} \approx 0{,}1742$ (2 BE)
5. $P(B) = P(X \ge 36) = 1 - P(X \le 35) \approx 1 - 0{,}7367 = 0{,}2633$ (2 BE)
6. c) $E(X) = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}85 = 34$ (1 BE)
7. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15} = \sqrt{5{,}1} \approx 2{,}26$ (2 BE)
8. d) Typisch bedeutet $|X - 34| \le \sigma \approx 2{,}26$, also $31{,}74 \le X \le 36{,}26$. Da X ganzzahlig ist, gilt $32 \le X \le 36$. (2 BE)
9. $P(32 \le X \le 36) = P(X \le 36) - P(X \le 31) \approx 0{,}8698 - 0{,}1354 = 0{,}7344$ (2 BE)
10. e) Sei m die Anzahl der Samen je Packung und Y_m die Anzahl der keimenden Samen, $Y_m \sim B(m;\, 0{,}85)$. Gesucht ist das kleinste m mit $P(Y_m \ge 30) = 1 - P(Y_m \le 29) > 0{,}95$. (1 BE)
11. Die Wahrscheinlichkeit $P(Y_m \ge 30)$ wächst mit m. Probieren mit dem Taschenrechner: (1 BE)
12. $m = 39$: $P(Y_{39} \ge 30) \approx 0{,}9421 < 0{,}95$ (1 BE)
13. $m = 40$: $P(Y_{40} \ge 30) \approx 0{,}9701 > 0{,}95$ (1 BE)
14. Die kleinste Anzahl ist $m = 40$ Samen je Packung. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In d) wird das Intervall mit den nicht ganzzahligen Grenzen $31{,}74$ und $36{,}26$ falsch gerundet, etwa zu $31 \le X \le 37$, obwohl nur die Werte 32 bis 36 höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert entfernt liegen. In e) wird $P(Y_m \ge 30)$ mit $P(Y_m > 30)$ oder mit $1 - P(Y_m \le 30)$ gleichgesetzt statt mit $1 - P(Y_m \le 29)$.