Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · ANALYTISCHE GEOMETRIE

# Punkte, Vektoren und Geraden

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **20 BE** · zusammen **40 BE**

Name _____ Datum _____

## So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

**Das brauchst du:** Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

**HINWEIS**

**PDF-Seite 1 bis 9:** Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 10:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

# Abitur Mathematik: Punkte, Vektoren und Geraden

6 Aufgaben

## Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2 \mid -1 \mid 3)$, $B(6 \mid 3 \mid 1)$ und $C(4 \mid 7 \mid 5)$ gegeben.

a) Bestimme die Koordinaten des Punktes $D$ so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts $M$. (2 BE)

b) Berechne die Länge der Seite $[AB]$ und weise nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ eine Raute ist. (2 BE)

**Aufgabe 2**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Punkte $P(-3 \mid 1 \mid 5)$ und $Q(5 \mid -3 \mid 9)$ sowie die Gerade $g$, die durch die Punkte $P$ und $Q$ verläuft.

a) Gib eine Gleichung der Geraden $g$ in Parameterform an und prüfe rechnerisch, ob der Punkt $R(9 \mid -5 \mid 12)$ auf $g$ liegt. (2 BE)

b) Der Punkt $T$ liegt auf der Strecke $[PQ]$ und teilt diese von $P$ aus im Verhältnis $1 : 3$ ($\overline{PT} : \overline{TQ} = 1 : 3$). Bestimme die Koordinaten von $T$. (2 BE)

**Aufgabe 3**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Weise nach, dass sich die Geraden $g$ und $h$ schneiden, und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts $S$. (3 BE)

b) Gib eine Gleichung derjenigen Geraden $k$ an, die parallel zu $g$ verläuft und durch den Punkt $P(0 \mid 0 \mid 5)$ geht, und begründe kurz, dass $g$ und $k$ echt parallel sind. (1 BE)

**Aufgabe 4**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Quader $ABCDEFGH$ besitzt die Grundfläche $ABCD$ und die Deckfläche $EFGH$, wobei die Kanten $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ parallel zueinander verlaufen. Gegeben sind die Eckpunkte $A(1 \mid 2 \mid -1)$, $B(1 \mid 6 \mid 2)$, $D(-3 \mid 2 \mid -1)$ und $E(1 \mid -1 \mid 3)$.

a) Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte $C$ und $G$ des Quaders. (2 BE)

b) Berechne die Kantenlänge $\overline{AB}$ und bestimme alle Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P_k(-3 \mid k \mid 2)$ vom Eckpunkt $D$ den gleichen Abstand hat wie der Eckpunkt $B$ vom Eckpunkt $A$. (2 BE)

**Aufgabe 5**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},$$

sowie die Geradenschar

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Begründe, dass für keinen Wert von $a \in \mathbb{R}$ die Gerade $h_a$ parallel oder identisch zur Geraden $g$ ist. (1 BE)

b) Bestimme denjenigen Wert von $a$, für den sich $g$ und $h_a$ schneiden, und gib an, für welche Werte von $a$ die Geraden $g$ und $h_a$ windschief sind. (3 BE)

**Aufgabe 6**

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 20 BE

In einem Leichtathletikstadion wird für Fernsehübertragungen ein straff gespanntes Tragseil für eine Seilkamera zwischen zwei Befestigungspunkten montiert. In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die $x_1x_2$-Ebene das horizontale Spielfeld dar; alle Koordinaten sind in Metern angegeben.

Der Fußpunkt eines ersten Masts befindet sich auf dem Spielfeld im Punkt $F_1(10 \mid 20 \mid 0)$, seine Spitze im Punkt $A(10 \mid 20 \mid 25)$. Das Tragseil verläuft im Modell geradlinig von der Mastspitze $A(10 \mid 20 \mid 25)$ zum Punkt $B(130 \mid 80 \mid 40)$ an der Spitze eines zweiten Pylons.

a) Gib die Höhe des ersten Masts $[F_1A]$ über dem Spielfeld an und begründe anhand der Koordinaten, dass dieser Mast senkrecht auf dem Spielfeld steht. Berechne zudem die Gesamtlänge des zwischen $A$ und $B$ gespannten Tragseils sowie die Koordinaten des Punktes $K$, an dem sich die Seilkamera befindet, wenn sie die Strecke $[AB]$ von $A$ aus im Verhältnis $1:2$ teilt ($\overline{AK} : \overline{KB} = 1:2$). (4 BE)

b) Bestimme eine Gleichung der Geraden $g$, entlang derer das Tragseil verläuft. Zur Stabilisierung des ersten Masts wird ein Abspannseil vom Mittelpunkt $M$ des Masts $[F_1A]$ geradlinig zu einem Verankerungspunkt $V$ auf dem Spielfeld gespannt. Der Richtungsvektor von $M$ nach $V$ ist kollinear zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Berechne die Koordinaten des Verankerungspunkts $V$. (3 BE)

Während einer Pause ruht die Seilkamera im Punkt $K(50 \mid 40 \mid 30)$. Gleichzeitig startet eine Kameradrohne im Punkt $D_0(97 \mid 26 \mid 22)$ und fliegt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 97 \\ 26 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei der Parameter $t \geq 0$ die Flugzeit in Sekunden ab dem Start in $D_0$ angibt und der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dem in einer Sekunde zurückgelegten Wegvektor entspricht.

c) Berechne die Geschwindigkeit der Drohne in $\mathrm{m/s}$ und in $\mathrm{km/h}$. Weise rechnerisch nach, dass die Tragseilgerade $g$ und die Drohnenfluggerade $h$ windschief sind, und bestimme den Höhenunterschied zwischen dem Tragseil und der Drohne an derjenigen Stelle, an der ihre $x_1$- und $x_2$-Koordinaten übereinstimmen. (5 BE)

d) Aus Sicherheitsgründen soll die Drohne mindestens $35\ \mathrm{m}$ von der im Punkt $K(50 \mid 40 \mid 30)$ ruhenden Seilkamera entfernt bleiben. Bestimme den Zeitpunkt $t$, zu dem sich die Drohne auf derselben Höhe wie die Seilkamera $K$ befindet, und beurteile rechnerisch, ob der Sicherheitsabstand zu diesem Zeitpunkt eingehalten wird. (4 BE)

e) Acht Sekunden nach dem Start ($t = 8$) stoppt die Drohne im Punkt $E$ und verharrt dort im Schwebeflug. Von $E$ aus wird ein optischer Richtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ ausgesendet. Bestimme die Koordinaten des Punktes $E$, weise rechnerisch nach, dass der Richtstrahl auf das Tragseil $[AB]$ trifft, und gib die Koordinaten des Auftreffpunkts $P$ an. (4 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

# Abitur Mathematik: Punkte, Vektoren und Geraden

6 Aufgaben

## Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2 \mid -1 \mid 3)$, $B(6 \mid 3 \mid 1)$ und $C(4 \mid 7 \mid 5)$ gegeben.

a) Bestimme die Koordinaten des Punktes $D$ so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts $M$. (2 BE)

b) Berechne die Länge der Seite $[AB]$ und weise nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ eine Raute ist. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $D(0 \mid 3 \mid 7)$, $M(3 \mid 3 \mid 4)$
**b)** $\overline{AB} = 6$; **wegen** $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ **ist das Parallelogramm** $ABCD$ **eine Raute.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Verbindungsvektor und Punkt $D$: Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-(-1) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, also $D(0 \mid 3 \mid 7)$. (1 BE)

2. Diagonalenschnittpunkt $M$ als Mittelpunkt der Diagonalen $[AC]$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1+7 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $M(3 \mid 3 \mid 4)$. (1 BE)

3. b) Seitenlänge $\overline{AB}$: $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$. (1 BE)

4. Nachweis der Raute: Mit $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 7-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt $\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$; wegen $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ sind zwei benachbarte Seiten gleich lang, sodass das Parallelogramm $ABCD$ eine Raute ist. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei der Bestimmung von $D$ wird häufig $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$ oder $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$ gerechnet. Beide Ansätze liefern $(8 \mid 11 \mid 3)$. Das ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $ABD'C$, nicht von $ABCD$, weil die Reihenfolge der Eckpunkte nicht beachtet wird.

**Aufgabe 2**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Punkte $P(-3 \mid 1 \mid 5)$ und $Q(5 \mid -3 \mid 9)$ sowie die Gerade $g$, die durch die Punkte $P$ und $Q$ verläuft.

a) Gib eine Gleichung der Geraden $g$ in Parameterform an und prüfe rechnerisch, ob der Punkt $R(9 \mid -5 \mid 12)$ auf $g$ liegt. (2 BE)

b) Der Punkt $T$ liegt auf der Strecke $[PQ]$ und teilt diese von $P$ aus im Verhältnis $1:3$ ($\overline{PT}:\overline{TQ}=1:3$). Bestimme die Koordinaten von $T$. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$ **mit** $r\in\mathbb{R}$**; der Punkt** $R(9 \mid -5 \mid 12)$ **liegt nicht auf** $g$**.**

**b)** $T(-1 \mid 0 \mid 6)$

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Geradengleichung: Mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}5-(-3)\\-3-1\\9-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$ lautet eine Gleichung $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}$ (alternativ mit gekürztem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$). (1 BE)

2. Punktprobe mit $R(9 \mid -5 \mid 12)$: Aus $\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-5\\12\end{pmatrix}$ folgt in den ersten beiden Zeilen $-3+8r=9 \iff r=1{,}5$ und $1-4r=-5 \iff r=1{,}5$, während die dritte Zeile $5+4r=12 \iff r=1{,}75$ liefert; wegen $1{,}5\neq 1{,}75$ liegt der Punkt $R(9 \mid -5 \mid 12)$ nicht auf $g$. (1 BE)

3. b) Ansatz über das Teilverhältnis: Da $T$ die Strecke $[PQ]$ im Verhältnis $1:3$ teilt, gilt $\overrightarrow{PT}=\frac{1}{1+3}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. (1 BE)

4. Ortsvektor und Koordinaten von $T$: $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PT}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}$, also $T(-1 \mid 0 \mid 6)$. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Beim Teilverhältnis $1:3$ wird häufig der Faktor $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{4}$ auf den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ angewendet, weil das Verhältnis der beiden Teilstrecken mit dem Anteil an der Gesamtstrecke $[PQ]$ verwechselt wird.

**Aufgabe 3**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Weise nach, dass sich die Geraden $g$ und $h$ schneiden, und berechne die Koordinaten des Schnittpunkts $S$. (3 BE)

b) Gib eine Gleichung derjenigen Geraden $k$ an, die parallel zu $g$ verläuft und durch den Punkt $P(0 \mid 0 \mid 5)$ geht, und begründe kurz, dass $g$ und $k$ echt parallel sind. (1 BE)

**ERGEBNIS**

**a) Schnittpunkt $S(6 \mid 3 \mid 0)$**

**b) $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$; $g$ und $k$ sind echt parallel, da $P(0 \mid 0 \mid 5)$ nicht auf $g$ liegt.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Gleichungssystem durch Gleichsetzen von $g$ und $h$: I: $4 + s = 2 + 2t$, II: $-1 + 2s = 5 - t$, III: $2 - s = -2 + t$. (1 BE)

2. Lösen des Systems und Probe: Addition von I und III ergibt $6 = 3t \iff t = 2$; Einsetzen in I liefert $4 + s = 6 \iff s = 2$. Einsetzen von $s = 2$ und $t = 2$ in II ergibt die wahre Aussage $3 = 3$, womit sich $g$ und $h$ schneiden. (1 BE)

3. Berechnung des Schnittpunkts: Einsetzen von $s = 2$ in $g$ ergibt $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, also den Schnittpunkt $S(6 \mid 3 \mid 0)$. (1 BE)

4. b) Gleichung und Begründung für $k$: Mit dem Stützpunkt $P(0 \mid 0 \mid 5)$ und dem Richtungsvektor von $g$ folgt $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Für $x_1 = 0$ auf $g$ gilt $s = -4$, woraus $x_2 = -1 + 2 \cdot (-4) = -9 \neq 0$ folgt; da $P(0 \mid 0 \mid 5)$ nicht auf $g$ liegt, sind $g$ und $k$ echt parallel. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Beim Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen wird mitunter für beide Geraden derselbe Parametername verwendet oder vergessen, die aus zwei Gleichungen berechneten Parameterwerte $s = 2$ und $t = 2$ in der dritten Gleichung zu überprüfen.

**Aufgabe 4**

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein Quader $ABCDEFGH$ besitzt die Grundfläche $ABCD$ und die Deckfläche $EFGH$, wobei die Kanten $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ parallel zueinander verlaufen. Gegeben sind die Eckpunkte $A(1 \mid 2 \mid -1)$, $B(1 \mid 6 \mid 2)$, $D(-3 \mid 2 \mid -1)$ und $E(1 \mid -1 \mid 3)$.

a) Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte $C$ und $G$ des Quaders. (2 BE)

b) Berechne die Kantenlänge $\overline{AB}$ und bestimme alle Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P_k(-3 \mid k \mid 2)$ vom Eckpunkt $D$ den gleichen Abstand hat wie der Eckpunkt $B$ vom Eckpunkt $A$. (2 BE)

**ERGEBNIS**

**a)** $C(-3 \mid 6 \mid 2)$, $G(-3 \mid 3 \mid 6)$
**b)** $\overline{AB} = 5$; $k = 6$ **oder** $k = -2$

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Eckpunkt $C$: Mit $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 2-2 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $C(-3 \mid 6 \mid 2)$. (1 BE)

2. Eckpunkt $G$: Mit $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $G(-3 \mid 3 \mid 6)$. (1 BE)

3. b) Kantenlänge $\overline{AB}$: Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. (1 BE)

4. Werte für $k$: Für $\overrightarrow{DP_k} = \begin{pmatrix} -3-(-3) \\ k-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ 3 \end{pmatrix}$ liefert $\left|\overrightarrow{DP_k}\right| = 5$ die Gleichung $\sqrt{0^2 + (k-2)^2 + 3^2} = 5 \iff (k-2)^2 + 9 = 25 \iff (k-2)^2 = 16$, woraus $k - 2 = 4 \iff k = 6$ oder $k - 2 = -4 \iff k = -2$ folgt. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Beim Lösen der Gleichung $(k-2)^2 = 16$ wird oft nur die positive Wurzel $k - 2 = 4$ betrachtet und die zweite Lösung $k - 2 = -4$ ($k = -2$) übersehen.

## Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},$$

sowie die Geradenschar

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Begründe, dass für keinen Wert von $a \in \mathbb{R}$ die Gerade $h_a$ parallel oder identisch zur Geraden $g$ ist. (1 BE)

b) Bestimme denjenigen Wert von $a$, für den sich $g$ und $h_a$ schneiden, und gib an, für welche Werte von $a$ die Geraden $g$ und $h_a$ windschief sind. (3 BE)

**ERGEBNIS**

**a) Die Richtungsvektoren sind wegen der ersten Koordinate ($1 \neq k \cdot 0$) für kein $a \in \mathbb{R}$ kollinear, sodass $g$ und $h_a$ nie parallel oder identisch sind.**
**b) Schnitt für $a = 0{,}5$; windschief für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$.**

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Untersuchung auf Kollinearität: Der Ansatz $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert in der ersten Zeile den Widerspruch $1 = k \cdot 0 = 0$; somit sind die Richtungsvektoren für kein $a \in \mathbb{R}$ kollinear, sodass $g$ und $h_a$ nie parallel oder identisch sind. (1 BE)
2. b) Aufstellen des Gleichungssystems durch Gleichsetzen von $g$ und $h_a$: I: $2 + r = 1$, II: $1 - r = 4 + a \cdot s$, III: $2r = 2 + s$. (1 BE)
3. Bestimmung von $r$ und $s$: Aus I folgt $r = -1$; Einsetzen in III ergibt $-2 = 2 + s \iff s = -4$. (1 BE)
4. Bestimmung von $a$ und Schlussfolgerung: Einsetzen von $r = -1$ und $s = -4$ in II liefert $1 - (-1) = 4 - 4a \iff 2 = 4 - 4a \iff a = 0{,}5$. Somit schneiden sich $g$ und $h_a$ genau für $a = 0{,}5$; da Parallelität und Identität nach Teilaufgabe a ausgeschlossen sind, sind $g$ und $h_a$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$ windschief. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei der Untersuchung der Richtungsvektoren auf Kollinearität wird aus der dritten Zeile $k = 2$ abgelesen und aus der zweiten Zeile $-1 = 2a \iff a = -0{,}5$ berechnet, ohne zu prüfen, dass die erste Zeile $1 = 0$ für jeden Wert von $a$ unerfüllbar ist.

## Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 20 BE

In einem Leichtathletikstadion wird für Fernsehübertragungen ein straff gespanntes Tragseil für eine Seilkamera zwischen zwei Befestigungspunkten montiert. In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die $x_1x_2$-Ebene das horizontale Spielfeld dar; alle Koordinaten sind in Metern angegeben.

Der Fußpunkt eines ersten Masts befindet sich auf dem Spielfeld im Punkt $F_1(10 \mid 20 \mid 0)$, seine Spitze im Punkt $A(10 \mid 20 \mid 25)$. Das Tragseil verläuft im Modell geradlinig von der Mastspitze $A(10 \mid 20 \mid 25)$ zum Punkt $B(130 \mid 80 \mid 40)$ an der Spitze eines zweiten Pylons.

a) Gib die Höhe des ersten Masts $[F_1A]$ über dem Spielfeld an und begründe anhand der Koordinaten, dass dieser Mast senkrecht auf dem Spielfeld steht. Berechne zudem die Gesamtlänge des zwischen $A$ und $B$ gespannten Tragseils sowie die Koordinaten des Punktes $K$, an dem sich die Seilkamera befindet, wenn sie die Strecke $[AB]$ von $A$ aus im Verhältnis $1:2$ teilt ($\overline{AK} : \overline{KB} = 1:2$). (4 BE)

b) Bestimme eine Gleichung der Geraden $g$, entlang derer das Tragseil verläuft. Zur Stabilisierung des ersten Masts wird ein Abspannseil vom Mittelpunkt $M$ des Masts $[F_1A]$ geradlinig zu einem Verankerungspunkt $V$ auf dem Spielfeld gespannt. Der Richtungsvektor von $M$ nach $V$ ist kollinear zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Berechne die Koordinaten des Verankerungspunkts $V$. (3 BE)

Während einer Pause ruht die Seilkamera im Punkt $K(50 \mid 40 \mid 30)$. Gleichzeitig startet eine Kameradrohne im Punkt $D_0(97 \mid 26 \mid 22)$ und fliegt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 97 \\ 26 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei der Parameter $t \geq 0$ die Flugzeit in Sekunden ab dem Start in $D_0$ angibt und der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dem in einer Sekunde zurückgelegten Wegvektor entspricht.

c) Berechne die Geschwindigkeit der Drohne in $\mathrm{m/s}$ und in $\mathrm{km/h}$. Weise rechnerisch nach, dass die Tragseilgerade $g$ und die Drohnenfluggerade $h$ windschief sind, und bestimme den Höhenunterschied zwischen dem Tragseil und der Drohne an derjenigen Stelle, an der ihre $x_1$- und $x_2$-Koordinaten übereinstimmen. (5 BE)

d) Aus Sicherheitsgründen soll die Drohne mindestens $35\ \mathrm{m}$ von der im Punkt $K(50 \mid 40 \mid 30)$ ruhenden Seilkamera entfernt bleiben. Bestimme den Zeitpunkt $t$, zu dem sich die Drohne auf derselben Höhe wie die Seilkamera $K$ befindet, und beurteile rechnerisch, ob der Sicherheitsabstand zu diesem Zeitpunkt eingehalten wird. (4 BE)

e) Acht Sekunden nach dem Start ($t = 8$) stoppt die Drohne im Punkt $E$ und verharrt dort im Schwebeflug. Von $E$ aus wird ein optischer Richtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ ausgesendet. Bestimme die Koordinaten des Punktes $E$, weise rechnerisch nach, dass der Richtstrahl auf das Tragseil $[AB]$ trifft, und gib die Koordinaten des Auftreffpunkts $P$ an. (4 BE)

**ERGEBNIS**

**a) Höhe des ersten Masts:** $25\ \text{m}$ **(senkrecht zum Spielfeld, da** $\overrightarrow{F_1A} = \begin{pmatrix}0\\0\\25\end{pmatrix}$ **parallel zur** $x_3$**-Achse verläuft); Gesamtlänge des Tragseils:** $\overline{AB} = 135\ \text{m}$**;** $K(50 \mid 40 \mid 30)$
**b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\20\\25\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ **mit** $r \in \mathbb{R}$**;** $V(5 \mid 10 \mid 0)$
**c) Geschwindigkeit:** $7\ \text{m/s}$ **(**$25{,}2\ \text{km/h}$**);** $g$ **und** $h$ **sind windschief; Höhenunterschied bei gleichen** $x_1$**- und** $x_2$**-Koordinaten:** $2\ \text{m}$
**d)** $t = 4$ **(nach** $4\ \text{s}$**); Abstand** $\sqrt{1325} \approx 36{,}40\ \text{m} > 35\ \text{m}$**, der Sicherheitsabstand wird eingehalten.**
**e)** $E(73 \mid 74 \mid 38)$**; Auftreffpunkt auf dem Tragseil** $[AB]$**:** $P(98 \mid 64 \mid 36)$

**LÖSUNGSWEG**

1. a) Höhe und senkrechte Lage des ersten Masts: Es gilt $\overrightarrow{F_1A} = \begin{pmatrix}0\\0\\25\end{pmatrix}$; da die $x_1$- und $x_2$-Koordinaten von $F_1(10 \mid 20 \mid 0)$ und $A(10 \mid 20 \mid 25)$ übereinstimmen, verläuft $\overrightarrow{F_1A}$ parallel zur $x_3$-Achse und steht somit senkrecht auf der $x_1x_2$-Ebene (dem Spielfeld). Die Höhe des ersten Masts beträgt $25\ \text{m}$. (1 BE)

2. Gesamtlänge des Tragseils: Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}130-10\\80-20\\40-25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\60\\15\end{pmatrix}$ ergibt sich
$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{120^2 + 60^2 + 15^2} = \sqrt{14400 + 3600 + 225} = \sqrt{18225} = 135\ \text{m}$. (1 BE)

3. Position $K$ der Seilkamera: Wegen $\overline{AK} : \overline{KB} = 1 : 2$ gilt $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix}$ und damit
$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10+40\\20+20\\25+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\40\\30\end{pmatrix}$, also $K(50 \mid 40 \mid 30)$. (2 BE)

4. b) Gleichung der Tragseilgeraden $g$: Wegen $\overrightarrow{AB} = 15 \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ lautet eine Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\20\\25\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ (wobei $r = 0$ zu $A$ und $r = 15$ zu $B$ gehört). (1 BE)

5. Mittelpunkt $M$ und Gerade des Abspannseils: Der Mittelpunkt von $[F_1A]$ ist $M(10 \mid 20 \mid 12{,}5)$, sodass das Abspannseil auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\20\\12{,}5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ liegt. (1 BE)

6. Verankerungspunkt $V$ auf dem Spielfeld ($x_3 = 0$): Aus $12{,}5 - 5s = 0$ folgt $s = 2{,}5$; Einsetzen ergibt
$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix}10 + 2{,}5 \cdot (-2)\\20 + 2{,}5 \cdot (-4)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}$, also $V(5 \mid 10 \mid 0)$. (1 BE)

7. c) Geschwindigkeit der Drohne: Der Betrag des Richtungsvektors beträgt $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$. Die Geschwindigkeit beträgt somit $7\ \text{m/s}$, was $7 \cdot 3{,}6 = 25{,}2\ \text{km/h}$ entspricht. (2 BE)

8. Prüfung der Richtungsvektoren von $g$ und $h$: Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear (aus der ersten Koordinate folgte der Faktor $-\frac{3}{8}$, aus der zweiten der Faktor $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, und $-\frac{3}{8} \neq \frac{3}{2}$); somit sind $g$ und $h$ weder parallel noch identisch. (1 BE)

9. Gleichsetzen der $x_1$- und $x_2$-Koordinaten von $g$ und $h$: Aus I: $10 + 8r = 97 - 3t \iff 8r + 3t = 87$ und II: $20 + 4r = 26 + 6t \iff 2r - 3t = 3$ folgt durch Addition $10r = 90 \iff r = 9$ und durch Einsetzen in II $18 - 3t = 3 \iff t = 5$. (1 BE)

10. Überprüfung in der $x_3$-Koordinate und Höhenunterschied: Für $r = 9$ und $t = 5$ stimmen die ersten beiden Koordinaten überein ($x_1 = 82$, $x_2 = 56$); die dritte Koordinate liefert auf $g$ den Wert $x_3 = 25 + 9 = 34$ und auf $h$ den Wert $x_3 = 22 + 2 \cdot 5 = 32$. Wegen $34 \neq 32$ sind $g$ und $h$ windschief, und der Höhenunterschied an dieser Stelle beträgt $34\ \text{m} - 32\ \text{m} = 2\ \text{m}$. (1 BE)

11. d) Zeitpunkt gleicher Höhe wie $K(50 \mid 40 \mid 30)$: Gleichsetzen der $x_3$-Koordinate von $h$ mit 30 ergibt $22 + 2t = 30 \iff 2t = 8 \iff t = 4$ (also nach $4\ \text{s}$). (1 BE)

12. Position der Drohne zum Zeitpunkt $t = 4$: Einsetzen in $h$ liefert $\overrightarrow{OD_4} = \begin{pmatrix} 97 \\ 26 \\ 22 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$, also $D_4(85 \mid 50 \mid 30)$. (1 BE)

13. Abstand zur Seilkamera $K(50 \mid 40 \mid 30)$: Mit $\overrightarrow{KD_4} = \begin{pmatrix} 85 - 50 \\ 50 - 40 \\ 30 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ beträgt der Abstand $\left|\overrightarrow{KD_4}\right| = \sqrt{35^2 + 10^2 + 0^2} = \sqrt{1325} \approx 36{,}40\ \text{m}$. (1 BE)

14. Beurteilung: Da $\sqrt{1325} \approx 36{,}40\ \text{m} > 35\ \text{m}$ gilt, wird der Sicherheitsabstand zu diesem Zeitpunkt eingehalten. (1 BE)

15. e) Koordinaten des Punktes $E$ für $t = 8$: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 97 \\ 26 \\ 22 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 74 \\ 38 \end{pmatrix}$, also $E(73 \mid 74 \mid 38)$. (1 BE)

16. Gleichungssystem für den Schnitt des Richtstrahls mit $g$: Gleichsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ 74 \\ 38 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(u \geq 0)$ und $g$ ergibt I: $10 + 8r = 73 + 25u$, II: $20 + 4r = 74 - 10u \iff 2r + 5u = 27$ und III: $25 + r = 38 - 2u \iff r = 13 - 2u$. (1 BE)

17. Lösen des Gleichungssystems: Einsetzen von III in II liefert $2(13 - 2u) + 5u = 27 \iff 26 + u = 27 \iff u = 1$ und damit $r = 13 - 2 \cdot 1 = 11$. Die Probe in I ergibt $10 + 8 \cdot 11 = 98$ und $73 + 25 \cdot 1 = 98$ (wahre Aussage). (1 BE)

18. Prüfung der Streckenbedingung und Auftreffpunkt $P$: Wegen $u = 1 > 0$ liegt der Punkt in Strahlrichtung, und wegen $0 \leq 11 \leq 15$ liegt er auf der Strecke $[AB]$ zwischen $A$ $(r = 0)$ und $B$ $(r = 15)$. Einsetzen von $r = 11$ in $g$ ergibt den Auftreffpunkt $P(98 \mid 64 \mid 36)$. (1 BE)

**TYPISCHE FEHLER**

Bei der Umrechnung der Geschwindigkeit von $\text{m/s}$ in $\text{km/h}$ in Teilaufgabe c wird häufig durch $3{,}6$ dividiert statt mit $3{,}6$ multipliziert. In Teilaufgabe e wird nach dem Berechnen des Schnittpunkts der beiden Geraden oft vergessen zu begründen, warum der Schnittpunkt wegen $0 \leq r \leq 15$ tatsächlich auf der endlichen Tragseilstrecke $[AB]$ liegt.