Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · ANALYTISCHE GEOMETRIE

Ebenen

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **20 BE** · zusammen **40 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Ebenen

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 4 \mid 1)$ und $C(1 \mid 2 \mid -1)$, die in der Ebene E liegen.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (3 BE)

b) Gegeben ist außerdem die Punktschar $P_k(k \mid 2k \mid k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimme denjenigen Wert von k, für den der Punkt P_k in der Ebene E liegt. (1 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

.

a) Weise nach, dass die Gerade g echt parallel zur Ebene E verläuft. (2 BE)

b) Betrachtet wird die Schar der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Bestimme denjenigen Wert von a, für den die Gerade h_a vollständig in der Ebene E liegt. (2 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E. (2 BE)

b) Bestimme die Größe des Schnittwinkels α, unter dem die Gerade g die Ebene E schneidet. (2 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$ und der Punkt $P(5 \mid -4 \mid 3)$.

a) Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E. (2 BE)

b) Der Punkt P wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P'. (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 - 12 = 0$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Die Ebene E schneidet die x_1-Achse im Punkt A und die x_3-Achse im Punkt C. Gib die Koordinaten von A und C an. (1 BE)

b) Auf der Geraden g liegen zwei Punkte, die von der Ebene E den Abstand 3 haben. Bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte. (3 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 20 BE

In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Alle Koordinaten sind in Metern angegeben.

Die geneigte, verglaste Dachfläche einer alpinen Forschungsstation wird modellhaft durch das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(12 \mid 0 \mid 3)$, $B(0 \mid 8 \mid 3)$, $C(0 \mid 4 \mid 5)$ und $D(6 \mid 0 \mid 5)$ beschrieben. Das Viereck $ABCD$ liegt in der Ebene E.

a) Weise nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, und ermittle eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 42 = 0$) (4 BE)

b) Für den effizienten Betrieb der in die Dachfläche integrierten Solarmodule ist ein Neigungswinkel der Dachfläche gegenüber dem horizontalen Boden zwischen $25°$ und $35°$ vorgeschrieben. Beurteile rechnerisch, ob diese Vorgabe erfüllt ist. (3 BE)

c) Neben dem Gebäude steht ein Wetterradarmast, dessen Spitze sich im Modell im Punkt $M(7 \mid 6 \mid 8)$ befindet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt paralleles Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Station. Berechne die Koordinaten des Schattenpunkts S der Mastspitze M auf der Ebene E sowie die Größe des Winkels α, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Ebene E treffen. (5 BE)

d) Zur Überprüfung der Solarmodule schwebt eine Messdrohne im Punkt $P(8 \mid 5 \mid 10)$. Berechne die Koordinaten desjenigen Punktes L auf der Ebene E, der von P den kleinsten Abstand hat, und gib diesen kleinsten Abstand in Metern an. Durch die spiegelnde Verglasung der Dachfläche entsteht vom Punkt P ein optisches Spiegelbild im Punkt P', der durch Spiegelung von P an der Ebene E hervorgeht. Bestimme die Koordinaten von P'. (4 BE)

e) Für eine automatische Reinigungsanlage wird oberhalb der Dachfläche eine gerade Führungsschiene geplant, die im Modell auf einer Geraden der Schar $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ k \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $k > 3$ liegt. Weise nach, dass jede Gerade der Schar h_k echt parallel zur Ebene E verläuft, und bestimme denjenigen Wert von k, für den die Gerade h_k von der Ebene E den Abstand $0{,}6\ \mathrm{m}$ hat. (4 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Ebenen

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 4 \mid 1)$ und $C(1 \mid 2 \mid -1)$, die in der Ebene E liegen.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (3 BE)

b) Gegeben ist außerdem die Punktschar $P_k(k \mid 2k \mid k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimme denjenigen Wert von k, für den der Punkt P_k in der Ebene E liegt. (1 BE)

ERGEBNIS

a) $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6 = 0$
b) $k = 2$

LÖSUNGSWEG

1. a) Spannvektoren der Ebene aufstellen: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1 BE)

2. Normalenvektor über das Kreuzprodukt bestimmen (alternativ über ein lineares Gleichungssystem aus $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$): $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, Wahl von $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1 BE)

3. Punktprobe mit $A(3 \mid 0 \mid 0)$ durchführen: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - d = 0 \implies d = 6$, also $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6 = 0$ (1 BE)

4. b) Koordinaten von $P_k(k \mid 2k \mid k-1)$ in die Ebenengleichung einsetzen und auflösen:
$2k + 2k - 2(k-1) - 6 = 0 \iff 2k - 4 = 0 \iff k = 2$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Bei der Berechnung des Kreuzprodukts wird häufig das Vorzeichen der zweiten Komponente n_2 vertauscht, sodass fälschlicherweise $+3$ statt -3 entsteht. In Teilaufgabe b) wird beim Einsetzen von $x_3 = k - 1$ oft die Klammer um $k - 1$ vergessen, was zu $-2k - 1$ statt $-2k + 2$ führt.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

a) Weise nach, dass die Gerade g echt parallel zur Ebene E verläuft. (2 BE)

b) Betrachtet wird die Schar der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Bestimme denjenigen Wert von a, für den die Gerade h_a vollständig in der Ebene E liegt. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ **und Punktprobe liefert** $2 \neq 0$**, somit ist** g **echt parallel zu** E**.**
b) $a = 2$

LÖSUNGSWEG

1. a) Skalarprodukt aus Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen (alternativ durch direktes Einsetzen der Geradengleichung in E): $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 0$ (1 BE)
2. Aufpunkt $P(2 \mid 0 \mid 2)$ von g in E einsetzen: $2 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot 2 - 6 = 2 \neq 0$; da der Aufpunkt nicht in E liegt, verläuft g echt parallel zu E (1 BE)
3. b) Allgemeine Koordinaten von h_a in E einsetzen (alternativ über Orthogonalität des Richtungsvektors zu $\vec{n}$ und separate Punktprobe des Aufpunkts): $2(3 + a^2 s) - (a + 6s) + 2(1 - s) - 6 = 0 \iff (2 - a) + (2a^2 - 8)s = 0$ (1 BE)
4. Bedingungen für die Lage in E für alle $s \in \mathbb{R}$ auswerten: $2a^2 - 8 = 0 \implies a = 2$ oder $a = -2$; aus $2 - a = 0$ folgt eindeutig $a = 2$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe b) wird häufig nur die Orthogonalität zwischen dem Richtungsvektor von h_a und dem Normalenvektor von E geprüft ($2a^2 - 8 = 0$) und vergessen zu kontrollieren, für welchen Wert auch der Aufpunkt in E liegt, sodass fälschlicherweise auch $a = -2$ als Lösung angegeben wird.

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E. (2 BE)

b) Bestimme die Größe des Schnittwinkels α, unter dem die Gerade g die Ebene E schneidet. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $S(3 \mid 2 \mid 1)$
b) $\alpha = 30°$

LÖSUNGSWEG

1. a) Koordinaten von g in die Gleichung von E einsetzen: $2(1+t) + (-2+2t) + (3-t) = 9 \iff 3 + 3t = 9 \iff t = 2$ (1 BE)

2. $t = 2$ in die Geradengleichung von g einsetzen: $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $S(3 \mid 2 \mid 1)$ (1 BE)

3. b) Beträge von Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie deren Skalarprodukt bestimmen: $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, $|\vec{u}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ und $|\vec{n} \cdot \vec{u}| = |2+2-1| = 3$ (1 BE)

4. Schnittwinkel über die Sinusbeziehung berechnen: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 30°$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene wird häufig $\cos(\alpha)$ statt $\sin(\alpha)$ verwendet, wodurch der Winkel zum Normalenvektor ($60°$) statt des Schnittwinkels mit der Ebene ($30°$) berechnet wird.

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$ und der Punkt $P(5 \mid -4 \mid 3)$.

a) Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E. (2 BE)

b) Der Punkt P wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P'. (2 BE)

ERGEBNIS
a) $d(P, E) = 6$
b) $P'(-3 \mid 4 \mid -1)$

LÖSUNGSWEG

1. a) Lotgerade l durch P mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E aufstellen und mit E schneiden (alternativ über die Hessesche Normalenform): $2(5 + 2t) - 2(-4 - 2t) + (3 + t) - 3 = 0 \iff 18 + 9t = 0 \iff t = -2$ (1 BE)
2. Abstand über den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PF} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ zum Lotfußpunkt $F(1 \mid 0 \mid 1)$ bestimmen: $d(P, E) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$ (1 BE)
3. b) Ortsvektor des Bildpunktes P' durch Verdopplung des Lotvektors $\overrightarrow{PF}$ von P aus aufstellen (alternativ über $\overrightarrow{P'} = \vec{F} + \overrightarrow{PF}$): $\overrightarrow{P'} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1 BE)
4. Koordinaten des Spiegelpunktes berechnen: $\overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $P'(-3 \mid 4 \mid -1)$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Bei der Punktspiegelung an einer Ebene wird oft nur der einfache Vektor $\overrightarrow{PF}$ statt $2 \cdot \overrightarrow{PF}$ zu $\vec{P}$ addiert, sodass man lediglich den Lotfußpunkt $F(1 \mid 0 \mid 1)$ auf der Ebene statt des Spiegelpunktes P' erhält.

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 - 12 = 0$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Die Ebene E schneidet die x_1-Achse im Punkt A und die x_3-Achse im Punkt C. Gib die Koordinaten von A und C an. (1 BE)

b) Auf der Geraden g liegen zwei Punkte, die von der Ebene E den Abstand 3 haben. Bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte. (3 BE)

ERGEBNIS

a) $A(3 \mid 0 \mid 0)$ **und** $C(0 \mid 0 \mid 4)$
b) $Q_1(3 \mid -1 \mid 5)$ **und** $Q_2(0 \mid 2 \mid -1)$

LÖSUNGSWEG

1. a) Achsenschnittpunkte durch Nullsetzen der übrigen Koordinaten ablesen: $4x_1 - 12 = 0 \implies A(3 \mid 0 \mid 0)$ und $3x_3 - 12 = 0 \implies C(0 \mid 0 \mid 4)$ (1 BE)
2. b) Abstand eines allgemeinen Geradenpunktes $Q_t(t \mid 2 - t \mid -1 + 2t)$ von E mit $|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5$ über die Abstandsformel (alternativ über Hilfsebenen im Abstand 3 zu E) ausdrücken:
$d(Q_t, E) = \frac{|4t + 3(-1+2t) - 12|}{5} = \frac{|10t - 15|}{5} = |2t - 3|$ (1 BE)
3. Betragsgleichung $|2t - 3| = 3$ lösen: $2t - 3 = 3 \implies t_1 = 3$ und $2t - 3 = -3 \implies t_2 = 0$ (1 BE)
4. Beide Parameterwerte in g einsetzen: für $t_1 = 3$ ergibt sich $Q_1(3 \mid -1 \mid 5)$ und für $t_2 = 0$ ergibt sich $Q_2(0 \mid 2 \mid -1)$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Lösen der Betragsgleichung $|10t - 15| = 15$ wird häufig die Fallunterscheidung vergessen und nur die Gleichung $10t - 15 = 15$ gelöst, wodurch der zweite Punkt $Q_2(0 \mid 2 \mid -1)$ fehlt.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 20 BE

In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Alle Koordinaten sind in Metern angegeben.

Die geneigte, verglaste Dachfläche einer alpinen Forschungsstation wird modellhaft durch das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(12 \mid 0 \mid 3)$, $B(0 \mid 8 \mid 3)$, $C(0 \mid 4 \mid 5)$ und $D(6 \mid 0 \mid 5)$ beschrieben. Das Viereck $ABCD$ liegt in der Ebene E.

a) Weise nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, und ermittle eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 42 = 0$) (4 BE)

b) Für den effizienten Betrieb der in die Dachfläche integrierten Solarmodule ist ein Neigungswinkel der Dachfläche gegenüber dem horizontalen Boden zwischen 25° und 35° vorgeschrieben. Beurteile rechnerisch, ob diese Vorgabe erfüllt ist. (3 BE)

c) Neben dem Gebäude steht ein Wetterradarmast, dessen Spitze sich im Modell im Punkt $M(7 \mid 6 \mid 8)$ befindet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt paralleles Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Station.
Berechne die Koordinaten des Schattenpunkts S der Mastspitze M auf der Ebene E sowie die Größe des Winkels α, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Ebene E treffen. (5 BE)

d) Zur Überprüfung der Solarmodule schwebt eine Messdrohne im Punkt $P(8 \mid 5 \mid 10)$. Berechne die Koordinaten desjenigen Punktes L auf der Ebene E, der von P den kleinsten Abstand hat, und gib diesen kleinsten Abstand in Metern an. Durch die spiegelnde Verglasung der Dachfläche entsteht vom Punkt P ein optisches Spiegelbild im Punkt P', der durch Spiegelung von P an der Ebene E hervorgeht. Bestimme die Koordinaten von P'. (4 BE)

e) Für eine automatische Reinigungsanlage wird oberhalb der Dachfläche eine gerade Führungsschiene geplant, die im Modell auf einer Geraden der Schar $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ k \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $k > 3$ liegt. Weise nach, dass jede Gerade der Schar h_k echt parallel zur Ebene E verläuft, und bestimme denjenigen Wert von k, für den die Gerade h_k von der Ebene E den Abstand $0{,}6\ \text{m}$ hat. (4 BE)

ERGEBNIS

a) $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$**, somit ist** $ABCD$ **ein Trapez;** $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 42 = 0$
b) $\varphi \approx 31{,}0°$**; die Vorgabe ist erfüllt.**
c) $S(3 \mid 4 \mid 4)$ **und** $\alpha \approx 64{,}8°$
d) $L(6 \mid 2 \mid 4)$**, kleinster Abstand** $7\ \text{m}$ **und** $P'(4 \mid -1 \mid -2)$
e) $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$ **und Aufpunkt nicht in** E **wegen** $k > 3$**;** $k = 3{,}7$

LÖSUNGSWEG

1. a) Kantenvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen; wegen $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$ sind die Kanten $[AB]$ und $[CD]$ parallel, womit $ABCD$ ein Trapez ist (1 BE)

2. Weiteren Spannvektor $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufstellen und Normalenvektor über das Kreuzprodukt bestimmen (alternativ über ein lineares Gleichungssystem): $\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, Wahl von $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2 BE)

3. Punktprobe mit $D(6 \mid 0 \mid 5)$ durchführen: $2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 5 = 42$, somit lautet die Koordinatengleichung $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 42 = 0$ (1 BE)

4. b) Ansatz für den Schnittwinkel φ zwischen E mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ($|\vec{n}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$) und der x_1x_2-Ebene mit $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_0|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_0|} = \frac{6}{7}$ (2 BE)

5. Winkel berechnen und Vorgabe prüfen: $\varphi = \arccos\left(\frac{6}{7}\right) \approx 31{,}0°$; da $31{,}0°$ zwischen $25°$ und $35°$ liegt, ist die Vorgabe erfüllt (1 BE)

6. c) Geradengleichung des Sonnenstrahls durch $M(7 \mid 6 \mid 8)$ aufstellen: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ (1 BE)

7. Koordinaten von g in E einsetzen: $2(7 - 2t) + 3(6 - t) + 6(8 - 2t) - 42 = 0 \iff 38 - 19t = 0 \iff t = 2$ (1 BE)

8. $t = 2$ in g einsetzen und Schattenpunkt angeben: $\vec{S} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $S(3 \mid 4 \mid 4)$ (1 BE)

9. Ansatz für den Schnittwinkel α zwischen g ($|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$) und E: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-4 - 3 - 12|}{7 \cdot 3} = \frac{19}{21}$ (1 BE)

10. Winkel berechnen: $\alpha = \arcsin\left(\frac{19}{21}\right) \approx 64{,}8°$ (1 BE)

11. d) Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit E schneiden:
$2(8 + 2r) + 3(5 + 3r) + 6(10 + 6r) - 42 = 0 \iff 49 + 49r = 0 \iff r = -1$ (1 BE)

12. $r = -1$ in l einsetzen und Lotfußpunkt angeben: $\vec{L} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $L(6 \mid 2 \mid 4)$ (1 BE)

13. Kleinsten Abstand bestimmen (alternativ über die Hessesche Normalenform):
$d(P, E) = |\overrightarrow{PL}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$, der kleinste Abstand beträgt $7\ \text{m}$ (1 BE)

14. Spiegelpunkt P' berechnen: $\overrightarrow{P'} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $P'(4 \mid -1 \mid -2)$ (1 BE)

15. e) Orthogonalität von Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}$ prüfen (alternativ durch Einsetzen von h_k in E):

$\vec{n} \cdot \vec{w} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = 0$ (1 BE)

16. Aufpunkt $Q_k(0 \mid 8 \mid k)$ in E einsetzen: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 6k - 42 = 6k - 18$; wegen $k > 3$ gilt $6k - 18 > 0$, sodass der Aufpunkt nicht in E liegt und h_k echt parallel zu E verläuft (1 BE)

17. Abstand des Aufpunkts $Q_k(0 \mid 8 \mid k)$ von E mit $0{,}6$ gleichsetzen: $d(Q_k, E) = \frac{|6k-18|}{7} = 0{,}6$ (1 BE)

18. Gleichung unter Beachtung von $k > 3$ nach k auflösen: $6k - 18 = 4{,}2 \iff 6k = 22{,}2 \iff k = 3{,}7$ (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe b) wird für den Schnittwinkel zweier Ebenen häufig $\sin(\varphi)$ statt $\cos(\varphi)$ verwendet, während in Teilaufgabe c) für den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene umgekehrt oft $\cos(\alpha)$ statt $\sin(\alpha)$ herangezogen wird. In Teilaufgabe e) wird beim Nachweis der echten Parallelität oft vergessen, mithilfe der Bedingung $k > 3$ zu begründen, dass der Aufpunkt Q_k nicht in E liegt.