Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · ANALYSIS

Integral und Stammfunktion

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **18 BE** · zusammen **38 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Integral und Stammfunktion

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen $f(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3$ und $F(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$.

a) Weise rechnerisch nach, dass F eine Stammfunktion von f ist. (2 BE)

b) Berechne den exakten Wert des bestimmten Integrals $\int_1^e f(x)\,dx$. (2 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion $g(x) = x^3 - 4x$.

a) Bestimme alle Nullstellen von g im Intervall $[-1; 2]$. (1 BE)

b) Berechne den Inhalt der Gesamtfläche, die der Graph von g im Intervall $[-1; 2]$ mit der x-Achse einschließt. (3 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die für $x > -1$ definierte Funktion $h(x) = \frac{12}{(x+1)^2}$.

a) Gib den Term einer Stammfunktion H von h an und berechne den Wert des Integrals $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x$. (2 BE)

b) Bestimme rechnerisch alle Werte von $b > 1$, für die $\int_1^b h(x)\,\mathrm{d}x = 4$ gilt. (2 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p : x \mapsto -x^2 + 5x$ und $q : x \mapsto x^2 - 3x$.

a) Berechne alle Schnittstellen der Graphen von p und q. (2 BE)

b) Ermittle den exakten Inhalt der Fläche, die von den Graphen von p und q vollständig eingeschlossen wird. (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $u(t) = (t-2) \cdot \mathrm{e}^t$ sowie die zugehörige Integralfunktion $J(x) = \int_2^x u(t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Gib $J(2)$ sowie den Term der Ableitungsfunktion $J'(x)$ an und begründe ohne Berechnung eines Stammfunktionsterms, dass die Funktion J an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum besitzt. (2 BE)

b) Beurteile ohne Berechnung einer Stammfunktion die folgende Aussage:
„Für jeden Wert $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ist der Funktionswert $J(x)$ positiv.“ (2 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 18 BE

Der symmetrische Querschnitt der Glasfassade eines Ausstellungspavillons wird für $x \in [-3;3]$ an der Oberkante durch den Graphen der Funktion $f(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2$ und an der Unterkante durch die x-Achse (Bodenlinie $y = 0$) begrenzt. Dabei geben x die horizontale Koordinate und $f(x)$ die Höhe über dem Boden jeweils in Metern an.

a) Berechne die maximale Höhe der Glasfassade in der Mitte ($x = 0$) sowie die Höhe der Fassade an den beiden äußeren Rändern ($x = -3$ und $x = 3$). (2 BE)

b) Zeige rechnerisch, dass die Funktion $F(x) = \frac{24}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x$ eine Stammfunktion von f ist, und berechne den gesamten Flächeninhalt A_{gesamt} der Glasfassade exakt sowie auf zwei Nachkommastellen genau.
(zur Kontrolle: $A_{\text{gesamt}} = \frac{48}{\pi} + 12$) (5 BE)

c) Ermittle die mittlere Höhe $\overline{h}$ der Glasfassade über die gesamte Breite von $6\,\text{m}$ auf zwei Nachkommastellen genau. (2 BE)

d) In einer Höhe von $4\,\text{m}$ über dem Boden verläuft ein waagrechter Stahlträger ($y = 4$) von einer Seite der oberen Dachkante zur anderen. Bestimme rechnerisch alle Schnittstellen der Geraden $y = 4$ mit dem Graphen von f im Intervall $[-3;3]$ und berechne den Flächeninhalt A_{oben} des oberhalb des Stahlträgers liegenden Glassegments auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

e) Auf der rechten Fassadenhälfte ($x \in [0;3]$) soll der gekrümmte Dachbereich oberhalb der Linie $y = 2$ durch eine senkrechte Strebe an der Stelle $x = c$ mit $c \in]0;3[$ in zwei gleich große Teilflächen zerlegt werden. Bestimme rechnerisch alle Werte von $c \in]0;3[$, die diese Bedingung erfüllen. (4 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Integral und Stammfunktion

6 Aufgaben

4 a) $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$; b) $A = \frac{64}{3}$

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen $f(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3$ und $F(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$.

a) Weise rechnerisch nach, dass F eine Stammfunktion von f ist. (2 BE)

b) Berechne den exakten Wert des bestimmten Integrals $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $F'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3 = f(x)$; **b)** $3\mathrm{e} - 1$

LÖSUNGSWEG

1. a) Anwendung der Produktregel auf $2x \cdot \ln(x)$: $F'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1$. (1 BE)
2. a) Vereinfachen für $x > 0$ ergibt $F'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2 + 1 = 2 \cdot \ln(x) + 3 = f(x)$, womit F eine Stammfunktion von f ist. (1 BE)
3. b) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [2x \cdot \ln(x) + x]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1)$. (1 BE)
4. b) Einsetzen der Grenzen mit $\ln(\mathrm{e}) = 1$ und $\ln(1) = 0$ liefert $(2\mathrm{e} \cdot 1 + \mathrm{e}) - (2 \cdot 1 \cdot 0 + 1) = 3\mathrm{e} - 1$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Ableiten von $2x \cdot \ln(x)$ in Teilaufgabe a) wird häufig die Produktregel ausgelassen und fehlerhaft $2 \cdot \frac{1}{x}$ gebildet. In Teilaufgabe b) wird an der unteren Grenze $x = 1$ oft $F(1) = 0$ angenommen, obwohl der Summand $+x$ den Wert $F(1) = 1$ liefert.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion $g(x) = x^3 - 4x$.

a) Bestimme alle Nullstellen von g im Intervall $[-1;2]$. (1 BE)

b) Berechne den Inhalt der Gesamtfläche, die der Graph von g im Intervall $[-1;2]$ mit der x-Achse einschließt. (3 BE)

ERGEBNIS
a) $x_1 = 0$ **und** $x_2 = 2$**; b)** $A = \frac{23}{4} = 5{,}75$

LÖSUNGSWEG
1. a) Ausklammern in $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0$ liefert die reellen Nullstellen -2, 0 und 2; im Intervall $[-1;2]$ liegen davon $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. (1 BE)
2. b) Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Wegen der Nullstelle im Inneren bei $x_1 = 0$ wird das Integral in zwei Teilintegrale über $[-1;0]$ und $[0;2]$ aufgeteilt. (1 BE)
3. b) Berechnung der Teilintegrale: $\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = G(0) - G(-1) = 0 - \left(\frac{1}{4} - 2\right) = \frac{7}{4}$ und $\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0) = (4 - 8) - 0 = -4$. (1 BE)
4. b) Addition der Beträge ergibt den gesamten Flächeninhalt $A = \left|\frac{7}{4}\right| + |-4| = \frac{7}{4} + 4 = \frac{23}{4} = 5{,}75$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Wird direkt von -1 bis 2 durchintegriert, ohne den Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 0$ zu beachten, heben sich positive und negative Flächenanteile teilweise auf ($\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{4}$).

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die für $x > -1$ definierte Funktion $h(x) = \frac{12}{(x+1)^2}$.

a) Gib den Term einer Stammfunktion H von h an und berechne den Wert des Integrals $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x$. (2 BE)

b) Bestimme rechnerisch alle Werte von $b > 1$, für die $\int_1^b h(x)\,\mathrm{d}x = 4$ gilt. (2 BE)

ERGEBNIS
a) $H(x) = -\frac{12}{x+1}$**,** $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x = 3$**; b)** $b = 5$

LÖSUNGSWEG
1. a) Wegen $h(x) = 12(x+1)^{-2}$ ist $H(x) = -12(x+1)^{-1} = -\frac{12}{x+1}$ eine Stammfunktion von h. (1 BE)
2. a) Einsetzen der Grenzen liefert $\int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{12}{x+1}\right]_1^3 = -\frac{12}{4} - \left(-\frac{12}{2}\right) = -3 + 6 = 3$. (1 BE)
3. b) Für $b > 1$ gilt $\int_1^b h(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{12}{x+1}\right]_1^b = -\frac{12}{b+1} + 6$. (1 BE)
4. b) Aus der Bedingung $6 - \frac{12}{b+1} = 4$ folgt $\frac{12}{b+1} = 2 \iff b + 1 = 6 \iff b = 5$ als einzige Lösung. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
In Teilaufgabe a) wird für $\frac{12}{(x+1)^2}$ häufig fälschlicherweise eine Logarithmusfunktion $12 \cdot \ln\left((x+1)^2\right)$ als Stammfunktion angesetzt oder das negative Vorzeichen bei $-12(x+1)^{-1}$ weggelassen.

Aufgabe 4

Ergebnis: a) $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$; b) $A = \frac{64}{3}$

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p : x \mapsto -x^2 + 5x$ und $q : x \mapsto x^2 - 3x$.

a) Berechne alle Schnittstellen der Graphen von p und q. (2 BE)

b) Ermittle den exakten Inhalt der Fläche, die von den Graphen von p und q vollständig eingeschlossen wird. (2 BE)

LÖSUNGSWEG

1. a) Gleichsetzen der Funktionsterme: $-x^2 + 5x = x^2 - 3x \iff 2x^2 - 8x = 0$. (1 BE)
2. a) Ausklammern ergibt $2x(x - 4) = 0$, woraus die beiden Schnittstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ folgen. (1 BE)
3. b) Differenzfunktion bilden und integrieren: Auf $[0; 4]$ gilt $p(x) - q(x) = -2x^2 + 8x \geq 0$, also $A = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^4$. (1 BE)
4. b) Auswerten an den Grenzen liefert $A = -\frac{2}{3} \cdot 64 + 4 \cdot 16 - 0 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{64}{3}$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Bilden der Differenzfunktion $p(x) - q(x)$ wird die Klammer um $q(x) = x^2 - 3x$ oft nicht beachtet, sodass $-x^2 + 5x - x^2 - 3x = -2x^2 + 2x$ statt $-2x^2 + 8x$ entsteht.

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $u(t) = (t-2) \cdot \mathrm{e}^t$ sowie die zugehörige Integralfunktion $J(x) = \int_2^x u(t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Gib $J(2)$ sowie den Term der Ableitungsfunktion $J'(x)$ an und begründe ohne Berechnung eines Stammfunktionsterms, dass die Funktion J an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum besitzt. (2 BE)

b) Beurteile ohne Berechnung einer Stammfunktion die folgende Aussage:
„Für jeden Wert $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ist der Funktionswert $J(x)$ positiv." (2 BE)

ERGEBNIS

a) $J(2) = 0$, $J'(x) = (x-2) \cdot \mathrm{e}^x$, lokales Minimum wegen Vorzeichenwechsel von J' bei $x = 2$ von $-$ nach $+$; b) Die Aussage ist wahr, da $x = 2$ das einzige globale Minimum mit $J(2) = 0$ ist.

LÖSUNGSWEG

1. a) Wegen übereinstimmender oberer und unterer Grenze gilt $J(2) = \int_2^2 u(t)\,\mathrm{d}t = 0$; nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $J'(x) = u(x) = (x-2) \cdot \mathrm{e}^x$. (1 BE)
2. a) Da $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $J'(2) = 0$, für $x < 2$ gilt $J'(x) < 0$ und für $x > 2$ gilt $J'(x) > 0$; wegen dieses Vorzeichenwechsels von $-$ nach $+$ besitzt J bei $x = 2$ ein lokales Minimum. (1 BE)
3. b) Da $J'(x) < 0$ für alle $x < 2$ und $J'(x) > 0$ für alle $x > 2$ gilt, ist J auf $]-\infty; 2]$ streng monoton fallend und auf $[2; +\infty[$ streng monoton steigend. (1 BE)
4. b) Folglich nimmt J bei $x = 2$ sein absolutes Minimum $J(2) = 0$ an und für jedes $x \neq 2$ gilt $J(x) > 0$; die Aussage ist somit wahr. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe a) wird häufig versucht, $u(t)$ durch partielle Integration aufwendig zu integrieren, anstatt direkt $J'(x) = u(x)$ zu nutzen. In Teilaufgabe b) wird für $x < 2$ oft fälschlicherweise $J(x) < 0$ vermutet, weil übersehen wird, dass bei $x < 2$ in umgekehrter Orientierung über einen negativen Integranden integriert wird.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 18 BE

Der symmetrische Querschnitt der Glasfassade eines Ausstellungspavillons wird für $x \in [-3;3]$ an der Oberkante durch den Graphen der Funktion $f(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2$ und an der Unterkante durch die x-Achse (Bodenlinie $y = 0$) begrenzt. Dabei geben x die horizontale Koordinate und $f(x)$ die Höhe über dem Boden jeweils in Metern an.

a) Berechne die maximale Höhe der Glasfassade in der Mitte ($x = 0$) sowie die Höhe der Fassade an den beiden äußeren Rändern ($x = -3$ und $x = 3$). (2 BE)

b) Zeige rechnerisch, dass die Funktion $F(x) = \frac{24}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x$ eine Stammfunktion von f ist, und berechne den gesamten Flächeninhalt A_{gesamt} der Glasfassade exakt sowie auf zwei Nachkommastellen genau.
(zur Kontrolle: $A_{\text{gesamt}} = \frac{48}{\pi} + 12$) (5 BE)

c) Ermittle die mittlere Höhe $\overline{h}$ der Glasfassade über die gesamte Breite von $6\,\text{m}$ auf zwei Nachkommastellen genau. (2 BE)

d) In einer Höhe von $4\,\text{m}$ über dem Boden verläuft ein waagrechter Stahlträger ($y = 4$) von einer Seite der oberen Dachkante zur anderen. Bestimme rechnerisch alle Schnittstellen der Geraden $y = 4$ mit dem Graphen von f im Intervall $[-3;3]$ und berechne den Flächeninhalt A_{oben} des oberhalb des Stahlträgers liegenden Glassegments auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

e) Auf der rechten Fassadenhälfte ($x \in [0;3]$) soll der gekrümmte Dachbereich oberhalb der Linie $y = 2$ durch eine senkrechte Strebe an der Stelle $x = c$ mit $c \in]0;3[$ in zwei gleich große Teilflächen zerlegt werden. Bestimme rechnerisch alle Werte von $c \in]0;3[$, die diese Bedingung erfüllen. (4 BE)

ERGEBNIS

a) Maximale Höhe $f(0) = 6\,\text{m}$**, Randhöhe** $f(-3) = f(3) = 2\,\text{m}$**; b)** $F'(x) = f(x)$**,** $A_{\text{gesamt}} = \frac{48}{\pi} + 12 \approx 27{,}28\,\text{m}^2$**; c)** $\overline{h} = \frac{8}{\pi} + 2 \approx 4{,}55\,\text{m}$**; d)** $x_1 = -2$ **und** $x_2 = 2$**,** $A_{\text{oben}} = \frac{24\sqrt{3}}{\pi} - 8 \approx 5{,}23\,\text{m}^2$**; e)** $c = 1$

LÖSUNGSWEG

1. a) In der Mitte gilt $f(0) = 4 \cdot \cos(0) + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$, also beträgt die maximale Höhe $6\,\text{m}$. (1 BE)
2. a) An den äußeren Rändern gilt $f(3) = f(-3) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 0 + 2 = 2$, also beträgt die Randhöhe jeweils $2\,\text{m}$. (1 BE)
3. b) Ableiten von F mithilfe der Kettenregel: $F'(x) = \frac{24}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2 = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2 = f(x)$. (2 BE)
4. b) Da $f(x) > 0$ auf $[-3;3]$ gilt, folgt für den Flächeninhalt $A_{\text{gesamt}} = \int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(-3)$. (1 BE)
5. b) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ergibt sich $A_{\text{gesamt}} = \left(\frac{24}{\pi} + 6\right) - \left(-\frac{24}{\pi} - 6\right) = \frac{48}{\pi} + 12 \approx 27{,}28\,\text{m}^2$. (2 BE)
6. c) Für den Mittelwert von f auf $[-3;3]$ gilt $\overline{h} = \frac{1}{3-(-3)} \int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot A_{\text{gesamt}}$. (1 BE)
7. c) Einsetzen liefert $\overline{h} = \frac{1}{6}\left(\frac{48}{\pi} + 12\right) = \frac{8}{\pi} + 2 \approx 4{,}55\,\text{m}$. (1 BE)
8. d) Schnittstellen mit $y = 4$: $4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2 = 4 \iff \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}$. (1 BE)
9. d) Für $x \in [-3;3]$ liegt $\frac{\pi}{6}x$ in $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, woraus $\frac{\pi}{6}x = \pm\frac{\pi}{3}$ und damit die beiden Schnittstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ folgen. (1 BE)
10. d) Ansatz für die obere Teilfläche: $A_{\text{oben}} = \int_{-2}^{2} (f(x) - 4)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left(4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{24}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 2x\right]_{-2}^{2}$. (2 BE)
11. d) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt $A_{\text{oben}} = 2 \cdot \left(\frac{24}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\right) = \frac{24\sqrt{3}}{\pi} - 8 \approx 5{,}23\,\text{m}^2$. (1 BE)
12. e) Gesamtfläche oberhalb von $y = 2$ auf $[0;3]$: $\int_0^3 (f(x) - 2)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{24}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right]_0^3 = \frac{24}{\pi}$. (1 BE)
13. e) Die linke Teilfläche auf $[0;c]$ soll die Hälfte davon betragen: $\int_0^c 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\mathrm{d}x = \frac{24}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}c\right) = \frac{12}{\pi}$. (2 BE)
14. e) Division durch $\frac{24}{\pi}$ liefert $\sin\left(\frac{\pi}{6}c\right) = \frac{1}{2}$; für $c \in]0;3[$ gilt $\frac{\pi}{6}c \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, woraus $\frac{\pi}{6}c = \frac{\pi}{6}$ und somit eindeutig $c = 1$ folgt. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Ableiten und Integrieren von $\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ wird der innere Faktor $\frac{\pi}{6}$ häufig an der falschen Stelle eingesetzt (Multiplikation statt Division beim Integrieren). In Teilaufgabe d) wird zudem oft $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet, ohne die Rechtecksfläche unterhalb des Trägers $y = 4$ abzuziehen.