Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · ANALYSIS

Anwendung: Änderungsrate und Modelle

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **19 BE** · zusammen **39 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Anwendung: Änderungsrate und Modelle

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein erhitztes Keramikbauteil kühlt in einer Prüfkammer ab. Die Funktion $T(t) = 20 + 400 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ mit $t \in [0; 10]$ modelliert die Temperatur des Bauteils in $^\circ\mathrm{C}$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten nach Beginn des Abkühlvorgangs.

a) Bestimme die Temperatur des Bauteils zu Beginn des Abkühlvorgangs sowie die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$. (2 BE)

b) Berechne den Zeitpunkt t_1, zu dem die momentane Abkühlrate des Bauteils $\frac{80}{\mathrm{e}}\ ^\circ\mathrm{C/min}$ beträgt, und gib die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall $[0; 5]$ exakt an. (2 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Bei einem Starkregenereignis wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Regenrückhaltebecken durch die Funktion $w(t) = -3t^2 + 12t$ für $t \in [0; 6]$ modelliert. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und $w(t)$ die Änderungsrate in $\mathrm{m^3/h}$. Zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$) befinden sich $50\,\mathrm{m^3}$ Wasser im Becken.

a) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen im Becken am stärksten zunimmt, und gib die zugehörige Änderungsrate an. (2 BE)

b) Berechne das Wasservolumen im Becken zum Zeitpunkt $t = 4$ und deute den Wert $w(5) = -15$ im Sachzusammenhang. (2 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die Funktion $s(x) = 9 - x^2$ für $x \in [0; 3]$. Für jedes $u \in]0; 3[$ bilden die Punkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$, $Q(u \mid s(u))$ und $R(0 \mid s(u))$ ein achsenparalleles Rechteck im ersten Quadranten.

a) Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks in Abhängigkeit von u durch $A(u) = -u^3 + 9u$ beschrieben wird. (1 BE)

b) Bestimme den Wert von $u \in]0; 3[$, für den der Flächeninhalt $A(u)$ maximal wird, und berechne diesen maximalen Flächeninhalt. (3 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $m : x \mapsto x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}$.

a) Weise nach, dass für die erste Ableitung $m'(x) = 2x(x+1) \cdot \mathrm{e}^{2x}$ gilt. (2 BE)

b) Bestimme alle Extremstellen des Graphen von m und begründe jeweils die Art des Extremums. (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $v(x) = 6\mathrm{e}^{-3x} + 2$.

a) Berechne den exakten Wert des Integrals $\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$. (2 BE)

b) Bestimme diejenige reelle Zahl k, für die $\int_0^1 (6\mathrm{e}^{-3x} + k)\,\mathrm{d}x = 5$ gilt. (2 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Eine großflächige Solarthermie-Anlage speist an einem sonnigen Frühlingstag Wärme in einen kommunalen Fernwärmespeicher ein. Für $t \in [0;14]$ wird die momentane Wärmeleistung der Anlage modellhaft durch die Funktion

$$P(t) = 1{,}5t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$ morgens ($t = 0$ entspricht $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$, $t = 14$ entspricht $22{:}00\,\mathrm{Uhr}$) und $P(t)$ die Wärmeleistung in Megawatt (MW) an.

a) Zeige, dass für die erste Ableitung $P'(t) = (3t - 0{,}75t^2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ gilt. Bestimme die Uhrzeit, zu der die Wärmeleistung der Anlage am größten ist, und gib diese maximale Wärmeleistung auf zwei Nachkommastellen gerundet an. (4 BE)

b) Berechne die mittlere Änderungsrate der Wärmeleistung in den ersten vier Stunden nach $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$ sowie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$ auf zwei Nachkommastellen gerundet. Deute beide Werte im Sachzusammenhang. (3 BE)

c) Für die zweite Ableitung von P gilt $P''(t) = (0{,}375t^2 - 3t + 3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Bestimme alle Wendestellen von P im Intervall $[0;14]$ exakt sowie auf zwei Nachkommastellen gerundet und begründe, zu welchem Zeitpunkt die Wärmeleistung am stärksten zunimmt. (4 BE)

d) Weise nach, dass die Funktion $E(t) = (-3t^2 - 12t - 24) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ eine Stammfunktion von P ist. Berechne die in den ersten acht Stunden ($t \in [0;8]$) insgesamt in den Fernwärmespeicher eingespeiste Wärmeenergie in Megawattstunden (MWh) exakt und auf zwei Nachkommastellen gerundet. (5 BE)

e) Die Betriebsleitung behauptet: „Bereits in den ersten acht Stunden ($t \in [0;8]$) wird mehr als drei Viertel der gesamten an diesem Tag ($t \in [0;14]$) eingespeisten Wärmeenergie erreicht.“ Prüfe diese Behauptung rechnerisch. (3 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Anwendung: Änderungsrate und Modelle

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Ein erhitztes Keramikbauteil kühlt in einer Prüfkammer ab. Die Funktion $T(t) = 20 + 400 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ mit $t \in [0; 10]$ modelliert die Temperatur des Bauteils in $^\circ\mathrm{C}$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten nach Beginn des Abkühlvorgangs.

a) Bestimme die Temperatur des Bauteils zu Beginn des Abkühlvorgangs sowie die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$. (2 BE)

b) Berechne den Zeitpunkt t_1, zu dem die momentane Abkühlrate des Bauteils $\frac{80}{\mathrm{e}}\ ^\circ\mathrm{C/min}$ beträgt, und gib die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall $[0; 5]$ exakt an. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $T(0) = 420\ ^\circ\mathrm{C}$, $T'(0) = -80\ ^\circ\mathrm{C/min}$; **b)** $t_1 = 5\,\mathrm{min}$, **mittlere Änderungsrate** $\frac{80}{\mathrm{e}} - 80\ ^\circ\mathrm{C/min}$

LÖSUNGSWEG

1. a) Einsetzen von $t = 0$ liefert die Anfangstemperatur $T(0) = 20 + 400 \cdot \mathrm{e}^{0} = 420\ ^\circ\mathrm{C}$. (1 BE)
2. a) Mit der Kettenregel folgt $T'(t) = 400 \cdot (-0{,}2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} = -80 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ und damit $T'(0) = -80\ ^\circ\mathrm{C/min}$. (1 BE)
3. b) Eine Abkühlrate von $\frac{80}{\mathrm{e}}\ ^\circ\mathrm{C/min}$ bedeutet $T'(t_1) = -\frac{80}{\mathrm{e}}$, also $-80 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t_1} = -80 \cdot \mathrm{e}^{-1}$, woraus $-0{,}2t_1 = -1$ und $t_1 = 5\,\mathrm{min}$ folgt. (1 BE)
4. b) Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0; 5]$ beträgt $\frac{T(5) - T(0)}{5 - 0} = \frac{(20 + 400\mathrm{e}^{-1}) - 420}{5} = \frac{80}{\mathrm{e}} - 80\ ^\circ\mathrm{C/min}$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Bei der Ableitung von $\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ wird der innere Faktor $-0{,}2$ vergessen. Zudem wird bei der Gleichung für die Abkühlrate häufig das negative Vorzeichen von $T'(t)$ übersehen.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Bei einem Starkregenereignis wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Regenrückhaltebecken durch die Funktion $w(t) = -3t^2 + 12t$ für $t \in [0; 6]$ modelliert. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und $w(t)$ die Änderungsrate in $\mathrm{m^3/h}$. Zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$) befinden sich $50\,\mathrm{m^3}$ Wasser im Becken.

a) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen im Becken am stärksten zunimmt, und gib die zugehörige Änderungsrate an. (2 BE)

b) Berechne das Wasservolumen im Becken zum Zeitpunkt $t = 4$ und deute den Wert $w(5) = -15$ im Sachzusammenhang. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $t = 2\,\mathrm{h}$, $w(2) = 12\,\mathrm{m^3/h}$; **b)** $V(4) = 82\,\mathrm{m^3}$, **zum Zeitpunkt** $t = 5\,\mathrm{h}$ **nimmt das Wasservolumen im Becken momentan mit einer Rate von** $15\,\mathrm{m^3/h}$ **ab**

LÖSUNGSWEG

1. a) Ableiten von w ergibt $w'(t) = -6t + 12$ und $w''(t) = -6$; aus $w'(t) = 0$ folgt $t = 2\,\mathrm{h}$. (1 BE)
2. a) Wegen $w''(2) = -6 < 0$ liegt bei $t = 2\,\mathrm{h}$ das Maximum vor; die größte Zunahme beträgt $w(2) = -3 \cdot 4 + 24 = 12\,\mathrm{m^3/h}$. (1 BE)
3. b) Das Wasservolumen zum Zeitpunkt $t = 4$ beträgt $V(4) = 50 + \int_0^4 (-3t^2 + 12t)\,\mathrm{d}t = 50 + [-t^3 + 6t^2]_0^4 = 50 + (-64 + 96) = 82\,\mathrm{m^3}$. (1 BE)
4. b) Deutung von $w(5) = -15$: Zum Zeitpunkt $t = 5\,\mathrm{h}$ nimmt das Wasservolumen im Becken momentan mit einer Rate von $15\,\mathrm{m^3/h}$ ab. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Berechnen des Bestands $V(4)$ wird das Anfangsvolumen $V(0) = 50\,\mathrm{m^3}$ vergessen. Bei der Deutung von $w(5) = -15$ wird der Wert fälschlicherweise als negativer Wasserbestand statt als Abnahme-Rate interpretiert.

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die Funktion $s(x) = 9 - x^2$ für $x \in [0; 3]$. Für jedes $u \in]0; 3[$ bilden die Punkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$, $Q(u \mid s(u))$ und $R(0 \mid s(u))$ ein achsenparalleles Rechteck im ersten Quadranten.

a) Zeige, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks in Abhängigkeit von u durch $A(u) = -u^3 + 9u$ beschrieben wird. (1 BE)

b) Bestimme den Wert von $u \in]0; 3[$, für den der Flächeninhalt $A(u)$ maximal wird, und berechne diesen maximalen Flächeninhalt. (3 BE)

ERGEBNIS
a) $A(u) = -u^3 + 9u$**; b)** $u = \sqrt{3}$, $A(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

LÖSUNGSWEG
1. a) Das Rechteck hat die Breite u und die Höhe $s(u) = 9 - u^2$, sodass für den Flächeninhalt $A(u) = u \cdot (9 - u^2) = -u^3 + 9u$ gilt. (1 BE)
2. b) Für die Ableitungen von A gilt $A'(u) = -3u^2 + 9$ und $A''(u) = -6u$. (1 BE)
3. b) Die Bedingung $A'(u) = 0$ liefert $u^2 = 3$; wegen $u \in]0; 3[$ ist $u = \sqrt{3}$ die einzige Lösung im betrachteten Intervall, und wegen $A''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$ liegt dort das Maximum vor. (1 BE)
4. b) Einsetzen in $A(u)$ ergibt den maximalen Flächeninhalt $A(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^3 + 9\sqrt{3} = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Die negative Lösung $u = -\sqrt{3}$ von $u^2 = 3$ wird nicht anhand des Definitionsbereichs $]0; 3[$ ausgeschlossen. Beim Vereinfachen von $(\sqrt{3})^3$ zu $3\sqrt{3}$ treten Rechenfehler auf.

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $m : x \mapsto x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}$.

a) Weise nach, dass für die erste Ableitung $m'(x) = 2x(x + 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}$ gilt. (2 BE)

b) Bestimme alle Extremstellen des Graphen von m und begründe jeweils die Art des Extremums. (2 BE)

ERGEBNIS
a) $m'(x) = 2x(x + 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}$**; b) lokales Maximum bei** $x_1 = -1$**, lokales Minimum bei** $x_2 = 0$

LÖSUNGSWEG
1. a) Mit der Produkt- und Kettenregel folgt $m'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{2x} + x^2 \cdot 2\mathrm{e}^{2x}$. (1 BE)
2. a) Ausklammern von $2x \cdot \mathrm{e}^{2x}$ liefert $m'(x) = 2x(x + 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}$. (1 BE)
3. b) Wegen $\mathrm{e}^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $m'(x) = 0 \iff 2x(x + 1) = 0$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$. (1 BE)
4. b) Da $2x(x + 1)$ bei $x_1 = -1$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$ und bei $x_2 = 0$ von $-$ nach $+$ wechselt, besitzt m ein lokales Maximum bei $x_1 = -1$ und ein lokales Minimum bei $x_2 = 0$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Bei der Ableitung von e^{2x} wird der Faktor 2 aus der Kettenregel vergessen, sodass fehlerhafte Extremstellen berechnet werden.

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $v(x) = 6\mathrm{e}^{-3x} + 2$.

a) Berechne den exakten Wert des Integrals $\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$. (2 BE)

b) Bestimme diejenige reelle Zahl k, für die $\int_0^1 (6\mathrm{e}^{-3x} + k)\,\mathrm{d}x = 5$ gilt. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \frac{2}{\mathrm{e}^3}$; **b)** $k = 3 + \frac{2}{\mathrm{e}^3}$

LÖSUNGSWEG

1. a) Eine Stammfunktion von v ist $V(x) = -2\mathrm{e}^{-3x} + 2x$. (1 BE)
2. a) Einsetzen der Grenzen liefert $\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x = [-2\mathrm{e}^{-3x} + 2x]_0^1 = (-2\mathrm{e}^{-3} + 2) - (-2\mathrm{e}^{0} + 0) = 4 - \frac{2}{\mathrm{e}^3}$. (1 BE)
3. b) Es gilt $\int_0^1 (6\mathrm{e}^{-3x} + k)\,\mathrm{d}x = [-2\mathrm{e}^{-3x} + kx]_0^1 = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}^3} + k$. (1 BE)
4. b) Gleichsetzen mit 5 ergibt $2 - \frac{2}{\mathrm{e}^3} + k = 5$ und somit $k = 3 + \frac{2}{\mathrm{e}^3}$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Aufleiten von $6\mathrm{e}^{-3x}$ wird mit -3 multipliziert statt durch -3 dividiert. Außerdem wird die untere Grenze $x = 0$ wegen $\mathrm{e}^0 = 1$ oft fälschlicherweise als 0 angenommen.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 19 BE

Eine großflächige Solarthermie-Anlage speist an einem sonnigen Frühlingstag Wärme in einen kommunalen Fernwärmespeicher ein. Für $t \in [0; 14]$ wird die momentane Wärmeleistung der Anlage modellhaft durch die Funktion

$$P(t) = 1{,}5t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$ morgens ($t = 0$ entspricht $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$, $t = 14$ entspricht $22{:}00\,\mathrm{Uhr}$) und $P(t)$ die Wärmeleistung in Megawatt (MW) an.

a) Zeige, dass für die erste Ableitung $P'(t) = (3t - 0{,}75t^2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ gilt. Bestimme die Uhrzeit, zu der die Wärmeleistung der Anlage am größten ist, und gib diese maximale Wärmeleistung auf zwei Nachkommastellen gerundet an. (4 BE)

b) Berechne die mittlere Änderungsrate der Wärmeleistung in den ersten vier Stunden nach $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$ sowie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$ auf zwei Nachkommastellen gerundet. Deute beide Werte im Sachzusammenhang. (3 BE)

c) Für die zweite Ableitung von P gilt $P''(t) = (0{,}375t^2 - 3t + 3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Bestimme alle Wendestellen von P im Intervall $[0; 14]$ exakt sowie auf zwei Nachkommastellen gerundet und begründe, zu welchem Zeitpunkt die Wärmeleistung am stärksten zunimmt. (4 BE)

d) Weise nach, dass die Funktion $E(t) = (-3t^2 - 12t - 24) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$ eine Stammfunktion von P ist. Berechne die in den ersten acht Stunden ($t \in [0; 8]$) insgesamt in den Fernwärmespeicher eingespeiste Wärmeenergie in Megawattstunden (MWh) exakt und auf zwei Nachkommastellen gerundet. (5 BE)

e) Die Betriebsleitung behauptet: „Bereits in den ersten acht Stunden ($t \in [0; 8]$) wird mehr als drei Viertel der gesamten an diesem Tag ($t \in [0; 14]$) eingespeisten Wärmeenergie erreicht." Prüfe diese Behauptung rechnerisch. (3 BE)

ERGEBNIS

a) $P'(t) = (3t - 0{,}75t^2)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$**, Maximum um** $12{:}00\,\mathrm{Uhr}$ **(**$t = 4$**) mit** $P(4) = \frac{24}{\mathrm{e}^2} \approx 3{,}25\,\mathrm{MW}$**; b) mittlere Änderungsrate** $\frac{6}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}81\,\mathrm{MW/h}$**, momentane Änderungsrate** $P'(2) = \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 1{,}10\,\mathrm{MW/h}$**; c)** $t_1 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17\,\mathrm{h}$ **(stärkste Zunahme) und** $t_2 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83\,\mathrm{h}$**; d)** $E'(t) = P(t)$**,** $W_{[0;8]} = 24 - \frac{312}{\mathrm{e}^4} \approx 18{,}29\,\mathrm{MWh}$**; e)** $W_{[0;14]} = 24 - \frac{780}{\mathrm{e}^7} \approx 23{,}29\,\mathrm{MWh}$**, Anteil** $\frac{W_{[0;8]}}{W_{[0;14]}} \approx 78{,}5\,\% > 75\,\%$ **(Behauptung trifft zu)**

LÖSUNGSWEG

1. a) Mit Produkt- und Kettenregel folgt $P'(t) = 3t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t} + 1{,}5t^2 \cdot (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = (3t - 0{,}75t^2)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. (1 BE)
2. a) Aus $P'(t) = 0$ folgt wegen $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$ die Gleichung $t(3 - 0{,}75t) = 0$ mit den Lösungen $t = 0$ und $t = 4$. (1 BE)
3. a) Da $P'(t) > 0$ für $t \in]0;4[$ und $P'(t) < 0$ für $t \in]4;14]$ gilt, nimmt P um $12{:}00\,\mathrm{Uhr}$ ($t = 4$) das absolute Maximum auf $[0;14]$ an. (1 BE)
4. a) Die maximale Wärmeleistung beträgt $P(4) = 1{,}5 \cdot 16 \cdot \mathrm{e}^{-2} = \frac{24}{\mathrm{e}^2} \approx 3{,}25\,\mathrm{MW}$. (1 BE)
5. b) Die mittlere Änderungsrate auf $[0;4]$ beträgt $\frac{P(4)-P(0)}{4-0} = \frac{24\mathrm{e}^{-2}-0}{4} = \frac{6}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}81\,\mathrm{MW/h}$. (1 BE)
6. b) Die momentane Änderungsrate bei $t = 2$ (um $10{:}00\,\mathrm{Uhr}$) beträgt $P'(2) = (6 - 3)\mathrm{e}^{-1} = \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 1{,}10\,\mathrm{MW/h}$. (1 BE)
7. b) Deutung: Zwischen $8{:}00\,\mathrm{Uhr}$ und $12{:}00\,\mathrm{Uhr}$ steigt die Wärmeleistung im Durchschnitt um etwa $0{,}81\,\mathrm{MW}$ pro Stunde, während sie genau um $10{:}00\,\mathrm{Uhr}$ momentan mit einer Rate von etwa $1{,}10\,\mathrm{MW}$ pro Stunde zunimmt. (1 BE)
8. c) Aus $P''(t) = 0$ folgt $0{,}375t^2 - 3t + 3 = 0$; Multiplikation mit $\frac{8}{3}$ ergibt $t^2 - 8t + 8 = 0$. (1 BE)
9. c) Die Lösungsformel liefert $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 8} = 4 \pm 2\sqrt{2}$, also $t_1 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17\,\mathrm{h}$ und $t_2 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83\,\mathrm{h}$ (beide in $[0;14]$ mit Vorzeichenwechsel von P''). (2 BE)
10. c) Die Leistung nimmt dort am stärksten zu, wo P' maximal ist. Auf $[0;14]$ kommen dafür nur die Nullstellen t_1 und t_2 von P'' sowie die Ränder 0 und 14 in Frage. Es gilt $P'(0) = 0$, $P'(t_1) > 0$, $P'(t_2) < 0$ und $P'(14) < 0$. Daher ist $P'(t_1)$ der größte Wert: Bei $t_1 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17\,\mathrm{h}$ steigt die Leistung am stärksten. (1 BE)
11. d) Mit der Produktregel gilt $E'(t) = (-6t - 12)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + (-3t^2 - 12t - 24) \cdot (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Zusammenfassen ergibt $E'(t) = (-6t - 12 + 1{,}5t^2 + 6t + 12)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1{,}5t^2\mathrm{e}^{-0{,}5t} = P(t)$. (2 BE)
12. d) Die in $[0;8]$ eingespeiste Wärmeenergie wird durch das Integral $W_{[0;8]} = \int_0^8 P(t)\,\mathrm{d}t = E(8) - E(0)$ bestimmt. (1 BE)
13. d) Mit $E(8) = (-192 - 96 - 24)\mathrm{e}^{-4} = -312\mathrm{e}^{-4}$ und $E(0) = -24\mathrm{e}^0 = -24$ folgt $W_{[0;8]} = 24 - \frac{312}{\mathrm{e}^4} \approx 18{,}29\,\mathrm{MWh}$. (2 BE)
14. e) Für die gesamte Tagesenergie auf $[0;14]$ gilt $W_{[0;14]} = \int_0^{14} P(t)\,\mathrm{d}t = E(14) - E(0) = 24 - \frac{780}{\mathrm{e}^7} \approx 23{,}29\,\mathrm{MWh}$. (1 BE)
15. e) Der Anteil der ersten acht Stunden beträgt $\frac{W_{[0;8]}}{W_{[0;14]}} \approx 78{,}5\,\% > 75\,\%$, sodass die Behauptung der Betriebsleitung zutrifft. (2 BE)

TYPISCHE FEHLER

Beim Nachweis der Stammfunktion E wird bei der Kettenregel der Faktor $-0{,}5$ vergessen. Bei Teilaufgabe c) werden beide Wendestellen genannt, ohne zu prüfen, an welcher der beiden die Leistung steigt ($P'(t) > 0$) und an welcher sie fällt ($P'(t) < 0$).