Lernaido

ABITUR · MATHEMATIK · ANALYSIS

Ableitung und Tangente

Übungsblatt · erhöhtes Anforderungsniveau (eA)

Punkte: Teil A **20 BE** · Teil B **18 BE** · zusammen **38 BE**

Name _____ Datum _____

So arbeitest du

1. **Teil A** löst du ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Fang damit an.
2. **Teil B** ist eine zusammenhängende Aufgabe. Dabei sind Taschenrechner und Formelsammlung erlaubt.
3. Schreibe in das Karofeld jeder Aufgabe: Ansatz, Rechenweg und einen Antwortsatz. Skizzen zeichnest du ebenfalls dort. Reicht der Platz nicht, nimm Karopapier. Die BE zeigen, wie viele Punkte ein Teil wert ist.
4. Vergleiche danach mit dem Lösungsbogen. Pro BE gibt es einen Punkt. Wo du Punkte verloren hast, lies den Lösungsweg.

Das brauchst du: Bleistift, Füller, Lineal, Taschenrechner und Formelsammlung (nur Teil B), bei Bedarf Karopapier

HINWEIS

PDF-Seite 1 bis 8: Deckblatt und Aufgaben. **Ab PDF-Seite 9:** Lösungsbogen mit Lösungswegen.

Diese Aufgaben hat Lernaido für die Abiturvorbereitung neu erstellt. Es sind keine Originalaufgaben. Lernaido ist nicht mit einem Kultusministerium oder dem IQB verbunden.

MATHEMATIK · ÜBUNGSBLATT

Abitur Mathematik: Ableitung und Tangente

6 Aufgaben

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die für $x > 0$ definierte Funktion $f(x) = \ln(x)$ und die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g(x) = x - 1$.

a) Zeige, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $P(1 \mid 0)$ berühren. (2 BE)

b) Zeige, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q(\mathrm{e} \mid 1)$ durch den Koordinatenursprung verläuft. (2 BE)

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die im Intervall $[0;6]$ definierte Funktion $g : x \mapsto 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi x$ mit erster Ableitungsfunktion g'.

a) Bestimme den Term von g' und berechne $g'(3)$. (2 BE)

b) Ermittle rechnerisch alle Stellen $x \in [0;6]$, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt. (2 BE)

Aufgabe 3

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = x^3 - x$. Die Punkte $A(0 \mid f(0))$ und $B(2 \mid f(2))$ liegen auf dem Graphen von f.

a) Berechne die Steigung der Geraden durch A und B. (1 BE)

b) Bestimme rechnerisch alle Stellen $x \in]0;2[$, an denen die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden durch A und B verläuft. (3 BE)

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die für $x \geq 0$ definierte Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Für $x > 0$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Die Gerade t berührt den Graphen von f im Punkt $P(4 \mid f(4))$.

a) Bestimme eine Gleichung von t. (2 BE)

b) Mithilfe von t lässt sich ein Näherungswert für $\sqrt{4{,}2}$ bestimmen. Berechne diesen Näherungswert ohne Taschenrechner und entscheide begründet, ob $\sqrt{4{,}2}$ größer oder kleiner als der Näherungswert ist. (2 BE)

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = x^3 + ax + b$ mit reellen Zahlen a und b. Der Graph von f hat im Punkt $P(1 \mid 3)$ die Tangente mit der Gleichung $y = 5x - 2$.

a) Ermittle die Werte von a und b. (3 BE)

b) Zeige, dass der Graph von f keine Extrempunkte besitzt. (1 BE)

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 18 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$.

a) Zeige, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, und leite f ab. Du erhältst $f'(x) = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. (3 BE)

b) Berechne die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von f und gib jeweils die Art des Extremums an. (4 BE)

c) Bestimme die Gleichung der Tangente t_0 an den Graphen von f im Koordinatenursprung und berechne den Steigungswinkel α von t_0 gegenüber der positiven x-Achse auf eine Nachkommastelle genau. (3 BE)

d) Die Gerade t_R berührt den Graphen von f im Punkt $R(3 \mid f(3))$. Bestimme rechnerisch eine Gleichung von t_R. Zusammen mit den Koordinatenachsen begrenzt t_R ein Dreieck; berechne dessen Flächeninhalt.
(zur Kontrolle: $t_R : y = -0{,}64x + 4{,}32$) (4 BE)

e) Für jedes $a > 0$ ist die Funktion $f_a(x) = \frac{8x}{x^2+a}$ definiert; es gilt $f_1 = f$. Für die erste Ableitung von f_a gilt $f_a'(x) = \frac{8(a-x^2)}{(x^2+a)^2}$. Bestimme rechnerisch alle Werte von $a > 0$, für die der Graph von f_a an der Stelle $x = 1$ die Steigung $\frac{3}{4}$ besitzt. (4 BE)

MATHEMATIK · LÖSUNGSBOGEN

Abitur Mathematik: Ableitung und Tangente

6 Aufgaben

3 a) $m = 3$; b) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Aufgabe 1

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben sind die für $x > 0$ definierte Funktion $f(x) = \ln(x)$ und die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g(x) = x - 1$.

a) Zeige, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $P(1 \mid 0)$ berühren. (2 BE)

b) Zeige, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q(\mathrm{e} \mid 1)$ durch den Koordinatenursprung verläuft. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $f(1) = g(1) = 0$ **und** $f'(1) = g'(1) = 1$**; b)** $t: y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$**, also** t **verläuft durch** $(0 \mid 0)$

LÖSUNGSWEG

1. a) Gemeinsamer Punkt: $f(1) = \ln(1) = 0$ und $g(1) = 1 - 1 = 0$, also liegt $P(1 \mid 0)$ auf beiden Graphen. (1 BE)
2. a) Gleiche Steigung: $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = 1$, also $f'(1) = 1 = g'(1)$. Die Graphen haben in P denselben Punkt und dieselbe Steigung und berühren sich daher. (1 BE)
3. b) Wegen $f(\mathrm{e}) = 1$ liegt Q auf dem Graphen. Mit $f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt für die Tangente t in Q: $y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}x$. (1 BE)
4. b) Für $x = 0$ ergibt sich $y = 0$; die Tangente t verläuft also durch den Koordinatenursprung. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe a) wird nur geprüft, dass beide Graphen den Punkt P gemeinsam haben. Für eine Berührung muss auch die Steigung übereinstimmen. In Teilaufgabe b) wird f' an der Stelle $x = 1$ statt an der Stelle $x = \mathrm{e}$ ausgewertet.

Aufgabe 2

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die im Intervall $[0;6]$ definierte Funktion $g: x \mapsto 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi x$ mit erster Ableitungsfunktion g'.

a) Bestimme den Term von g' und berechne $g'(3)$. (2 BE)

b) Ermittle rechnerisch alle Stellen $x \in [0;6]$, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt. (2 BE)

ERGEBNIS
a) $g'(x) = 2\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi$, $g'(3) = -3\pi$; **b)** $x_1 = 1$ **und** $x_2 = 5$

LÖSUNGSWEG
1. a) Mithilfe der Kettenregel ergibt sich $g'(x) = 6 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi = 2\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi$. (1 BE)
2. a) Einsetzen von $x = 3$ liefert $g'(3) = 2\pi \cdot \cos(\pi) - \pi = 2\pi \cdot (-1) - \pi = -3\pi$. (1 BE)
3. b) Bedingung für eine waagrechte Tangente: $g'(x) = 0 \iff 2\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \pi = 0 \iff \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{1}{2}$. (1 BE)
4. b) Für $x \in [0;6]$ durchläuft das Argument $\frac{\pi}{3}x$ das Intervall $[0;2\pi]$, sodass $\frac{\pi}{3}x_1 = \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}x_2 = \frac{5\pi}{3}$ gilt; daraus folgen die beiden Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
Bei der Kettenregel wird der innere Faktor $\frac{\pi}{3}$ häufig ausgelassen, und beim Lösen der Gleichung $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0;6]$ wird oft die zweite Lösung $x_2 = 5$ übersehen.

Aufgabe 3

Ergebnis: a) $m = 3$; **b)** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = x^3 - x$. Die Punkte $A(0 \mid f(0))$ und $B(2 \mid f(2))$ liegen auf dem Graphen von f.

a) Berechne die Steigung der Geraden durch A und B. (1 BE)

b) Bestimme rechnerisch alle Stellen $x \in]0;2[$, an denen die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden durch A und B verläuft. (3 BE)

LÖSUNGSWEG
1. a) Mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 8 - 2 = 6$ gilt für die Steigung der Geraden durch A und B: $m = \frac{6-0}{2-0} = 3$. (1 BE)
2. b) Ableitung bilden: $f'(x) = 3x^2 - 1$. (1 BE)
3. b) Die Tangente ist parallel zur Geraden durch A und B, wenn $f'(x) = 3$ gilt: $3x^2 - 1 = 3 \iff x^2 = \frac{4}{3}$. (1 BE)
4. b) Die Lösungen sind $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Im Intervall $]0;2[$ liegt nur die positive Lösung $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER
In Teilaufgabe b) wird $f'(x) = 0$ statt $f'(x) = 3$ angesetzt. Außerdem wird die negative Lösung $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ nicht anhand des Intervalls $]0;2[$ ausgeschlossen.

Aufgabe 4

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die für $x \geq 0$ definierte Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Für $x > 0$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Die Gerade t berührt den Graphen von f im Punkt $P(4 \mid f(4))$.

a) Bestimme eine Gleichung von t. (2 BE)

b) Mithilfe von t lässt sich ein Näherungswert für $\sqrt{4{,}2}$ bestimmen. Berechne diesen Näherungswert ohne Taschenrechner und entscheide begründet, ob $\sqrt{4{,}2}$ größer oder kleiner als der Näherungswert ist. (2 BE)

ERGEBNIS

a) $t: y = \frac{1}{4}x + 1$**; b) Näherungswert** $2{,}05$**;** $\sqrt{4{,}2}$ **ist kleiner als** $2{,}05$

LÖSUNGSWEG

1. a) Es gilt $f(4) = 2$ und $f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. (1 BE)
2. a) Tangentengleichung: $t: y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$. (1 BE)
3. b) Näherungswert: Einsetzen von $x = 4{,}2$ in t liefert $\frac{4{,}2}{4} + 1 = 1{,}05 + 1 = 2{,}05$. (1 BE)
4. b) Für $x > 0$ gilt $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$. Der Graph von f ist rechtsgekrümmt und verläuft unterhalb seiner Tangenten. Also ist $\sqrt{4{,}2}$ kleiner als der Näherungswert $2{,}05$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

In Teilaufgabe a) wird $f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ gerechnet. In Teilaufgabe b) wird der Näherungswert als exakter Wert angesehen und ohne Krümmungsargument entschieden.

Aufgabe 5

Teil A (ohne Hilfsmittel) · eA · 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = x^3 + ax + b$ mit reellen Zahlen a und b. Der Graph von f hat im Punkt $P(1 \mid 3)$ die Tangente mit der Gleichung $y = 5x - 2$.

a) Ermittle die Werte von a und b. (3 BE)

b) Zeige, dass der Graph von f keine Extrempunkte besitzt. (1 BE)

ERGEBNIS

a) $a = 2$ **und** $b = 0$**; b)** $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ **für alle** x

LÖSUNGSWEG

1. a) Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + a$, also $f'(1) = 3 + a$. (1 BE)
2. a) Die Tangente hat die Steigung 5, also $3 + a = 5$ und damit $a = 2$. (1 BE)
3. a) $P(1 \mid 3)$ liegt auf dem Graphen: $f(1) = 1 + 2 + b = 3$ liefert $b = 0$. (1 BE)
4. b) Mit $a = 2$ gilt $f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt keine waagrechte Tangente, also keine Extrempunkte. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Die y-Koordinate 3 des Punktes P wird als Steigung verwendet. Für b wird P in die Tangentengleichung statt in die Funktionsgleichung von f eingesetzt.

Aufgabe 6

Teil B (mit Taschenrechner und Formelsammlung) · eA · 18 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$.

a) Zeige, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, und leite f ab. Du erhältst $f'(x) = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. (3 BE)

b) Berechne die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von f und gib jeweils die Art des Extremums an. (4 BE)

c) Bestimme die Gleichung der Tangente t_0 an den Graphen von f im Koordinatenursprung und berechne den Steigungswinkel α von t_0 gegenüber der positiven x-Achse auf eine Nachkommastelle genau. (3 BE)

d) Die Gerade t_R berührt den Graphen von f im Punkt $R(3 \mid f(3))$. Bestimme rechnerisch eine Gleichung von t_R. Zusammen mit den Koordinatenachsen begrenzt t_R ein Dreieck; berechne dessen Flächeninhalt.
(zur Kontrolle: $t_R : y = -0{,}64x + 4{,}32$) (4 BE)

e) Für jedes $a > 0$ ist die Funktion $f_a(x) = \frac{8x}{x^2+a}$ definiert; es gilt $f_1 = f$. Für die erste Ableitung von f_a gilt $f_a'(x) = \frac{8(a-x^2)}{(x^2+a)^2}$. Bestimme rechnerisch alle Werte von $a > 0$, für die der Graph von f_a an der Stelle $x = 1$ die Steigung $\frac{3}{4}$ besitzt. (4 BE)

ERGEBNIS

a) $f(-x) = -f(x)$**,** $f'(x) = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$**; b) Tiefpunkt** $T(-1 \mid -4)$**, Hochpunkt** $H(1 \mid 4)$**; c)** $t_0 : y = 8x$**,** $\alpha \approx 82{,}9°$**; d)** $t_R : y = -0{,}64x + 4{,}32$**,** $A = 14{,}58$**; e)** $a_1 = \frac{5}{3}$ **und** $a_2 = 7$

LÖSUNGSWEG

1. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = \frac{8(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{8x}{x^2+1} = -f(x)$, womit die Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung nachgewiesen ist. (1 BE)
2. a) Ableiten mithilfe der Quotientenregel: $f'(x) = \frac{8\cdot(x^2+1)-8x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. (2 BE)
3. b) Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$: Der Zähler wird genau für $1 - x^2 = 0$ null, woraus die beiden Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ folgen. (1 BE)
4. b) Da $(x^2+1)^2 > 0$ gilt, bestimmt $1 - x^2$ das Vorzeichen von $f'(x)$: Bei $x_1 = -1$ wechselt f' das Vorzeichen von $-$ nach $+$ (Tiefpunkt), bei $x_2 = 1$ von $+$ nach $-$ (Hochpunkt). (2 BE)
5. b) Mit $f(-1) = -4$ und $f(1) = 4$ ergeben sich der Tiefpunkt $T(-1 \mid -4)$ und der Hochpunkt $H(1 \mid 4)$. (1 BE)
6. c) Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = \frac{8}{1} = 8$ lautet die Gleichung der Tangente im Ursprung $t_0: y = 8x$. (2 BE)
7. c) Für den Steigungswinkel α gilt $\tan(\alpha) = 8$, woraus $\alpha = \arctan(8) \approx 82{,}9°$ folgt. (1 BE)
8. d) Funktionswert und Steigung an der Stelle $x = 3$: $f(3) = \frac{24}{10} = 2{,}4$ und $f'(3) = \frac{8\cdot(1-9)}{10^2} = -\frac{64}{100} = -0{,}64$. (1 BE)
9. d) Einsetzen von $R(3 \mid 2{,}4)$ in $y = -0{,}64(x-3) + 2{,}4$ liefert die Tangentengleichung $t_R: y = -0{,}64x + 4{,}32$. (1 BE)
10. d) Schnittpunkte von t_R mit den Koordinatenachsen: Für $x = 0$ ist $y_S = 4{,}32$; für $y = 0$ folgt aus $-0{,}64x + 4{,}32 = 0$ die Schnittstelle $x_S = \frac{4{,}32}{0{,}64} = 6{,}75$. (1 BE)
11. d) Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 6{,}75 \cdot 4{,}32 = 14{,}58$. (1 BE)
12. e) Bedingung $f_a'(1) = \frac{3}{4}$: Einsetzen von $x = 1$ ergibt $\frac{8(a-1)}{(1+a)^2} = \frac{3}{4}$. (1 BE)
13. e) Multiplikation mit $4(a+1)^2$ führt auf $32(a-1) = 3(a^2+2a+1) \iff 3a^2 - 26a + 35 = 0$. (2 BE)
14. e) Auflösen der quadratischen Gleichung mit der Lösungsformel $a_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676-420}}{6} = \frac{26 \pm 16}{6}$ liefert die beiden positiven Lösungen $a_1 = \frac{5}{3}$ und $a_2 = 7$. (1 BE)

TYPISCHE FEHLER

Bei der Quotientenregel in Teilaufgabe a) werden im Zähler häufig die Terme vertauscht oder das Minuszeichen vor $8x \cdot 2x$ falsch gesetzt. In Teilaufgabe e) wird beim Umformen von $\frac{8(a-1)}{(a+1)^2} = \frac{3}{4}$ mitunter $(a+1)^2$ fehlerhaft als $a^2 + 1$ statt mit der ersten binomischen Formel als $a^2 + 2a + 1$ ausmultipliziert.